TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA KINH TẾ HỌC - KHOA TOÁN KINH TẾ
PGS. TS. NGUYỄN KHẮC MINH

TỐI ƯU HÓA ĐỘNG TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA KINH TẾ HỌC – KHOA TOÁN KINH TẾ
PGS.TS. Nguyễn Khắc Minh

TỐI ƯU HOÁ ĐỘNG TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI -2004

LỜI GIỚI THIỆU

Trong khi tư tưởng và phương pháp tối ưu hoá tĩnh đã được giới thiệu một cách có hệ thống và được ứng dụng vào việc phân tích kinh tế ở nước ta, thì tư tưởng và phương pháp tối ưu hoá động chưa được chú ý ở mức cần thiết. Trong hệ thống giáo trình của Trường Đại học Kinh tế quốc dân, giáo trình Quy hoạch động mới chỉ giới thiệu một trong những lối ngõ tối ưu hoá nhiều giai đoạn, đó là nguyên lý Bellman, và các phương pháp dựa trên nguyên lý này.

Ở các nước phát triển, thời gian gần đây, trong phân tích kinh tế và nghiên cứu kinh tế các phương pháp của tối ưu hoá động đã được sử dụng rất rộng rãi. Nhiều bài báo kinh tế trên văn đàn đã sử dụng các mô hình động để nghiên cứu các vấn đề như lạm phát, thất nghiệp, hiệu quả của các chính sách kinh tế, vấn đề môi trường, lựa chọn phương án đầu tư... Các mô hình đó được giải nhờ các phương pháp của tối ưu hoá động như: phép tính biến phân, quy hoạch động hoặc lý thuyết điều khiển tối ưu.

Cuốn sách "Tối ưu hoá động trong phân tích kinh tế" do Tiến sĩ Nguyễn Khắc Minh biên soạn nhằm giới thiệu những thành tựu hiện đại về phương pháp phân tích và xây dựng chương trình phát triển kinh tế nhiều giai doạn. Vấn đề xây dựng chương trình như thế một cách tốt nhất được đặt ra dưới dạng bài toán gọi là tối ưu hoá động. Nền tảng để đi đến phương pháp giải bài toán là sự kết hợp nhiều tư tưởng, trong đó giáo trình được biên soạn nêu bật ba hướng chủ yếu là nguyên lý Bellman trong quy hoạch động, phương trình Euler trong phép tính biến phân cổ điển và nguyên lý cực đại Pontriagin trong lý thuyết điều khiển tối ưu.

Mặc dù nói về phương pháp để giải bài toán đặt ra dưới dạng tổng quát, không phụ thuộc nội dung của quá trình hiện thực, cuốn sách này trong cách trình bày, đã đưa bài toán và phương pháp giải vào khung cảnh của sự phân tích kinh tế, đó là vấn đề kế hoạch phát triển một công ty, một ngành hoặc cả nước, vấn đề lạm phát, thất nghiệp, vấn đề ô nhiễm môi trường, khai thác tài nguyên, hành vi của độc quyền động.... (đó là những vấn đề hết sức căn bản của kinh tế vi mô và kinh tế vĩ mô) trong một khoảng thời gian nào đó. Việc trình bày phương pháp toán theo ngôn ngữ kinh tế khiến cho dấu hiệu nhận biết phương án tối ưu có thể trở nên gần gũi và sự suy luận có thể trở nên tự nhiên đối với những người làm kinh tế.

Phân tích kinh tế có thể làm theo hai góc độ khác nhau: Tĩnh và động. Theo cách phân tích tĩnh, các sự kiện được hiểu ngầm là có thể xẩy ra trong khoảng thời gian nhất định, và bỏ qua thời điểm xảy ra chúng, cũng như không để ý một nguyên nhân phải trải qua thời gian bao lâu mới đưa đến kết quả mong muốn. Phân tích tĩnh không có nghĩa là mọi cái được xem là không thay đổi, mà chỉ là bỏ qua yếu tố thời gian. Như vậy, phân tích động trở nên cần thiết đối với những vấn đề mà yếu tố thời gian đóng vai trò quan trọng như vấn đề tăng trưởng và phát triển kinh tế, hoặc trong việc vạch kế hoạch cụ thể để thực hiện một phương án nào đó.

Tác giả đã trình bày việc giải bài toán "Tối ưu động" một cách có hệ thống, các phương pháp giải được nhìn nhận trên một quan điểm thống nhất. Theo cách phân tích động, mỗi biến số được xét sẽ là hàm của thời gian. Tuỳ theo cách do thời gian mà ta có bài toán động rời rạc hay liên tục, chẳng hạn khi chọn đơn vị đo thời gian là khoảng ta sẽ có bài toán rời rạc. Trong phân tích kinh tế người ta thường

dùng cách chia thời gian ra các khoảng và xem xét hai loại biến số: kho và luồng. Biến số phụ thuộc vào thời điểm gọi là kho; biến số phụ thuộc vào khoảng gọi là luồng. Khi độ dài của khoảng thời gian được rút ngắn vô hạn thì mọi biến số sẽ trở thành biến kho. Vì thế, để nhìn nhận một cách thống nhất, ngay từ đầu, cuốn sách đã mô tả bài toán tối ưu hoá động là bài toán nhiều bước (hoặc nhiều giai đoạn) mà số bước có thể hữu hạn hoặc vô hạn.

Tư tưởng chung để giải bài toán được nêu ở chương I của cuốn sách là đưa bài toán nhiều bước về bài toán một bước mà ta có thể giải một cách đơn giản. Bài toán một bước được giải dựa trên dấu hiệu của lời giải, tức là những điều kiện cần mà lời giải phải thoả mãn và được gọi là điều kiện tối ưu. Ở bài toán trong trường hợp rời rạc, dưới dạng Quy hoạch động, điều kiện tối ưu là nguyên lý Bellman. Trường hợp bài toán liên tục có dạng bài toán tính biến phân, điều kiện tối ưu là phương trình Euler. Trường hợp bài toán liên tục có dạng bài toán Điều khiển tối ưu, điều kiện tối ưu là Nguyên lý Cực đại Pontriagin. Các điều kiện tối ưu có được giải thích là những dạng khác nhau của điều kiện tối ưu chung.

Các điều kiện cần này có ý nghĩa quan trọng trong thực hành - ở mỗi lúc đang trong một quá trình kinh tế nào đó, ta có thể dễ dàng thử xem các điều kiện cần có được thoả mãn hay không, nếu không thoả mãn ta chắc chắn rằng quá trình chưa tối ưu.

Về mối liên hệ giữa phương pháp phân tích động và phương pháp phân tích tĩnh, đáng chú ý là sự giải thích ý nghĩa kinh tế của trường hợp bài toán suy biến. Trong trường hợp như thế, cách nhìn động không đem lại kết luận gì mới hơn cách nhìn tĩnh.

Khẳng định về sự tồn tại con đường lớn trong phát triển kinh tế là một thành tựu quan trọng trong lý thuyết kinh tế hiện đại. Qua việc phân tích lời giải bài toán tối ưu hoá động, tác giả chỉ ra sự tồn tại và cách tìm con đường lớn, việc tìm nó rõ ràng có ý nghĩa ứng dụng thực hành không nhỏ,

Để viết cuốn sách này, chúng tôi nhận thấy, tác giả đã tham khảo rất nhiều sách báo nước ngoài và tiếp thu những kết quả nghiên cứu mới nhất trong thời gian gần đây.

Có thể nói rằng đây là cuốn sách về phương pháp toán được viết trên quan điểm kinh tế một cách thành công. Cuốn sách có thể dùng làm tài liệu giảng dạy, cũng như dùng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên và nghiên cứu sinh kinh tế. Để nắm vững và ứng dụng các kiến thức trong giáo trình này, người đọc cần có kiến thức về phương trình vi phân tuyến tính.

Cuốn sách này chẳng những bổ ích mà còn là đặc sắc.

PGS.TS. Nguyễn Văn Sinh

Khoa Toán Kinh tế - Đại học KTQD

LỜI NÓI ĐẦU

Nghiên cứu, phân tích sự vận động theo thời gian, sự phản ứng với các tình huống trong hành vi của các thực thể kinh tế (hãng, hộ gia đình, Nhà nước, nền kinh tế ...) để từ đó tìm hiểu các quy luật chi phối sự vận động, xác định cách thức hành động phù hợp với quy luật nhằm đạt mục tiêu là công việc hết sức quan trọng không những của các nhà nghiên cứu kinh tế mà còn của cả những người làm công việc quản lý, điều hành kinh doanh trong điều kiện hiện nay.

Mục tiêu của cuốn sách này là nhằm giới thiệu phương pháp phân tích động và ứng dụng của nó trong phân tích kinh tế. Vì vậy nội dung toán học được trình bày trong cuốn sách này không quá phức tạp mà chỉ là trình bày cơ sở toán học để phân tích động các vấn đề kinh tế vi mô cũng như vĩ mô ở mức độ khác nhau. Nhiều thí dụ kinh tế được lặp đi lặp lại chỉ nhằm nêu bật các điểm then chốt của ứng dụng các phương pháp trình bày.

Cuốn sách này được biên soạn dựa trên cơ sở tài liệu "Tối ưu hoá trong kinh tế " mà tôi được Khoa Toán kinh tế giao cho biên soạn và tập bài giảng về "Tối ưu động trong phân tích kinh tế" để bồi dưỡng cho giáo viên kinh tế học của Đại học kinh tế quốc dân năm 2003 cũng như các bài giảng về "Mô hình toán kinh tế" cho lớp cao học thí điểm của Đại học kinh tế quốc dân. Tuy nhiên cuốn sách này có mục tiêu rộng hơn, nó bao gồm việc giới thiệu phương pháp phân tích động và ứng dụng nên cả bài toán biến phân, điều khiển tối ưu và quy hoạch động trong phân tích kinh tế đều được giới thiệu.

Chương I tập trung vào việc mô tả bản chất của tối ưu động và giới thiệu các mô hình tối ưu động thường gặp trong kinh tế như : các mô hình tăng trưởng kinh tế, mô hình tiêu dùng, mô hình đầu tư, lý thuyết cập đầu tư động, mô hình tiết kiệm xã hội, mô hình người đại diện, các mô hình về phân tích chính sách tiền tệ, tài chính, mô hình tối ưu động của độc quyền, mô hình lựa chọn giữa lạm phát và thất nghiệp, các vấn đề về môi trường, khai thác tài nguyên, chính sách chống ô nhiễm, mô hình cân bằng tổng quát động, tiến bộ công nghệ...

Trong chương II chúng tôi giành cho việc giới thiệu phép tính biến phân và các ứng dụng của nó trong phân tích kinh tế.

Chương III giới thiệu về điều khiển tối ưu và ứng dụng của nó trong kinh tế nhằm cung cấp một công cụ hiện đại hơn phép tính biến phân để có thể giải quyết những vấn đề kinh tế phức tạp hơn có liên quan . Chương IV giới thiệu quy hoạch động. Chương này chúng tôi không giới thiệu lại các phương pháp mà trong các cuốn sách hiện tại đang có mà trực tiếp giới thiệu cách thức ứng dụng nó trong lĩnh vực phân tích động các chính sách kinh tế.

Chúng tôi đã cố gắng trình bày cách tiếp cận để phân tích động thông qua việc giới thiệu phép tính biến phân, điều khiển tối ưu và quy hoạch động, phương pháp phân tích những vấn đề kinh tế cụ thể được trình bày qua các mô hình kinh tế. Tuy nhiên cần nhấn mạnh rằng bản thân lý thuyết phép tính biến phân, điều khiển tối ưu và quy hoạch động sâu sắc và phức tạp, nhưng vì mục đích cuốn sách là nhằm giúp cho các nhà kinh tế một công cụ để phân tích động cho nên không đòi hỏi trình bày phức tạp về mặt toán học mà cố gắng làm sao cho dễ đọc và dễ hiểu và gắn được với các vấn đề kinh tế cụ thể.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ở sâu sắc tới PGS. TS. Nguyễn Văn Sinh, Người đã kiên trì, bỏ công ra đọc toàn bộ bản thảo, đã sửa chữa và đóng góp những ý kiến vô cùng quý giá cho cuốn sách này. Tôi xin chân thành cảm ơn PGS.TS. Hoàng Đình Tuấn, PGS.TS. Nguyễn Quang Dong và tất cả các thầy cô ở khoa Toán kinh tế, ĐHKTQD đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho việc biên soạn cuốn sách này. Tôi rất cảm ơn đối với các bạn học viên của lớp bồi dưỡng kinh tế học của khoa Kinh tế học và học viên của lớp cao học thí điểm của trường ĐHKTQD vì những ý kiến đóng góp quý báu của các bạn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ở các thầy các cô ở khoa Kinh tế học, ĐHKTQD và tất cả bạn bè đã tạo điều kiện để tôi có thể hoàn thành công việc này.

Đây là cuốn sách được biên soạn lần đầu tiên nên chắn chắn không khỏi có nhiều thiếu sót mong độc giả không phải là thông cảm, bỏ qua mà là được chỉ bảo và phê phán./.

Tác giả

CHƯƠNG I

GIỚI THIỆU TỐI ƯU ĐỘNG

Tối ưu hoá là chủ đề nổi bật trong phân tích kinh tế. Các phương pháp tính cổ điển tìm cực trị tự do và có ràng buộc cũng như các kỹ thuật của quy hoạch toán học chiếm một vị trí quan trọng trong các công cụ hàng ngày của các nhà kinh tế. Các công cụ như vậy có thể áp dụng chỉ cho các bài toán tối ưu *tĩnh*. Lời giải tìm được trong các bài toán như vậy thường là giá trị tối ưu *đơn* của mỗi biến chọn, như mức tối ưu của đầu ra ở một thời điểm và giá tối ưu cho sản phẩm. Nó không nói đến một kế hoạch của chuỗi hành động tối ưu.

Trong khi đó, một bài toán tối ưu *động* đặt câu hỏi về giá trị tối ưu của biến chọn là gì tại mỗi giai đoạn của thời kỳ kế hoạch (trường hợp thời gian rời rạc) hoặc tại mỗi thời điểm trong một khoảng thời gian đã cho, chẳng hạn [0, T] (trường hợp thời gian liên tục). Thậm chí có thể xét một tầm kế hoạch vô hạn, do đó khoảng thời gian tương ứng là $[0, \infty)$. Lời giải của một bài toán tối ưu động như vậy có dạng một *quỹ đạo (đường đi) theo thời gian tối ưu* đối với mọi biến chọn, chi tiết hoá các giá trị tốt nhất của biến chọn ở ngày hôm nay, ngày mai..., cho đến hết thời kỳ kế hoạch.

Chương này sẽ giới thiệu bản chất của tối ưu động và một số bài toán tối ưu động thường gặp trong kinh tế.

A. BẢN CHẤT CỦA TỐI ƯU ĐỘNG

I. ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐỘNG

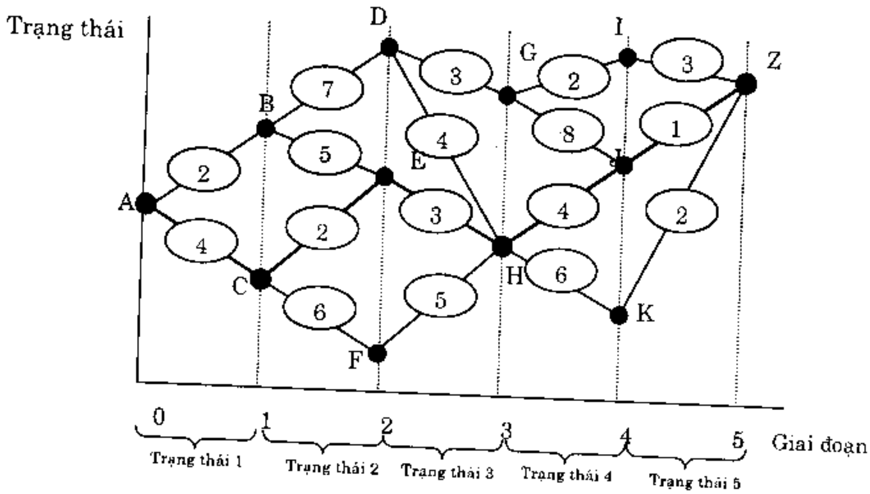
Mặc dù tối ưu động hầu hết được diễn tả theo thuật ngữ của một dãy *thời gian*, nhưng nó cũng có thể dự tính tầm kế hoạch như một dãy các giai đoạn trong một quá trình kinh tế. Trong trường hợp đó, tối ưu động có thể xem như một bài toán ra quyết định nhiều giai đoạn.

1.1. Ví dụ

1.1.1. Việc ra quyết định nhiều giai đoạn

Đặc trưng nhiều giai đoạn của tối ưu động có thể được minh hoạ bằng một thí dụ rời rạc đơn giản. Giả sử rằng một công ty chuyên về chế biến một chất nào đó từ *trạng thái ban đầu* A (trạng thái nguyên liệu) thành *trạng thái cuối cùng* Z (trạng thái thành phẩm) qua một quá trình sản xuất có năm giai đoạn. Trong mỗi giai đoạn, công ty đứng trước bài toán chọn trong số một vài quá trình con khác nhau có thể có, mỗi quá trình con đòi hỏi chi phí nhất định. Vấn đề là: công ty này chọn dãy các quá trình con qua năm giai đoạn như thế nào để cực tiểu hoá tổng chi phí?

Trong Hình 1.1, chúng ta minh hoạ bài toán như vậy bằng việc vẽ đồ thị các *giai đoạn* trên trục hoành và các *trạng thái* trên trục tung. Trạng thái khởi đầu A được chỉ ra bằng điểm cuối cùng bên trái (tại đầu giai đoạn 1); trạng thái cuối Z được chỉ ra bằng điểm cuối cùng bên phải (tại cuối giai đoạn 5). Các điểm khác B, C, ..., K chỉ ra các trạng thái trung gian mà chất nói trên có thể được biến đổi trong quá trình chế biến. Các điểm này (A, B, ..., Z) được gọi là các *đỉnh*. Để chỉ khả năng biến đổi từ trạng thái A sang trạng thái B, ta vẽ một *cung* từ điểm A đến điểm B. Cung khác AC chỉ ra rằng chất này cũng có thể biến đổi sang trạng thái C thay cho trạng thái B. Mỗi cung được gán một *giá trị* đặc biệt – ở đây là chi phí (nằm trong vòng tròn) trong Hình 1.1. Quyết định ở giai đoạn thứ nhất là biến đổi nguyên liệu sang trạng thái B (với chi phí 2 đơn vị tiền tệ) hay trạng thái C (với chi phí 4 đơn vị tiền tệ), nghĩa là, chọn cung AB hay cung AC. Một khi quyết định đã được chọn, sẽ nảy sinh một bài toán lựa chọn khác ở giai đoạn 2, quá trình đó cứ tiếp tục như vậy cho đến khi đạt tới trạng thái Z. Bài toán ở đây là chọn một dãy các cung nối nhau đi từ trái sang phải, bắt đầu tại A và kết thúc tại Z, sao cho tổng các giá trị của các cung thành phần là cực tiểu. Dãy các cung như vậy sẽ tạo thành một *quỹ đạo tối ưu*.



Hình 1.1

Có thể chỉ ra rằng nghiệm tối ưu đối với thí dụ hiện thời là đường đi ACEHJZ, với chi phí sản xuất cực tiểu là 14 đơn vị tiền tệ.

1.1.2. Trường hợp biến liên tục

Thí dụ trong Hình 1.1 đặc trưng bằng biến giai đoạn rời rạc, chỉ lấy các giá trị nguyên. Biến trạng thái cũng được giả định lấy các giá trị thuộc một tập hữu hạn nhỏ, {A, B, ..., Z}. Nếu các biến này liên tục, ta có thể có một tình huống như biểu diễn trên Hình 1.2, trong đó, để minh hoạ, ta chỉ có thể vẽ năm đường đi có thể có từ A đến Z. Mỗi đường đi có thể có đi qua một số vô hạn các giai đoạn trong khoảng [0, T]. Cũng có một số vô hạn các trạng thái trên mỗi đường đi, mỗi trạng thái là kết quả của một sự lựa chọn riêng trong một giai đoạn đặc biệt.

Đối với hầu hết các bài toán mà chúng ta sẽ đề cập đến sau này, biến giai đoạn sẽ biểu thị *thời gian*. Chẳng hạn, xét một công ty với số vốn ban đầu bằng A tại thời điểm 0, và số vốn mục tiêu định trước bằng Z tại thời điểm T. Nhiều kế hoạch đầu tư khác nhau trong khoảng thời gian [0,T] có thể đạt được số vốn mục tiêu tại thời điểm T, và, mỗi kế hoạch đầu tư biểu thị bằng một đường đi của vốn đặc biệt và dẫn đến một lợi nhuận tiềm năng đặc biệt đối với công ty. Trong trường hợp này ta có thể diễn giải các đường cong như những đường đi của vốn có thể có và các giá trị của đường đi như lợi nhuận tương ứng. Bài toán của công ty là xác định kế hoạch đầu tư - từ đó xác định đường đi của vốn – mang lại lợi nhuận tiềm năng cực đại. Tất

nhiên, lời giải của bài toán sẽ phụ thuộc rất lớn vào việc lợi nhuận tiềm năng có quan hệ với và xác định bởi cấu hình của đường đi của vốn như thế nào.

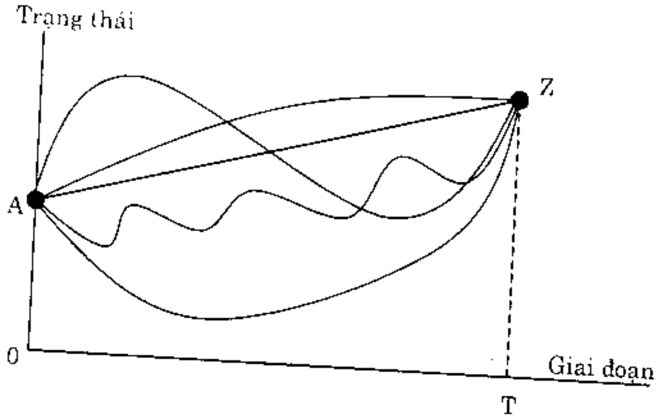
Như vậy, rõ ràng rằng, bất kể các biến là rời rạc hay liên tục, một dạng bài toán tối ưu đơn giản gồm các thành phần cơ bản sau đây:

1. Một điểm đầu đã cho và một điểm cuối đã cho;

2. Một tập hợp các đường đi (quỹ đạo) chấp nhận được từ điểm đầu đến điểm cuối;

3. Một tập hợp các giá trị của đường đi (quỹ đạo) dùng làm các chỉ số đánh giá kết quả thực hiện (chi phí, lợi nhuận, ...) gắn với các đường đi khác nhau;

4. Một mục tiêu được chỉ định – hoặc làm cực đại hoặc làm cực tiểu giá trị của đường đi, hay chỉ số đánh giá kết quả thực hiện, bằng cách chọn đường đi (quỹ đạo) tối ưu.



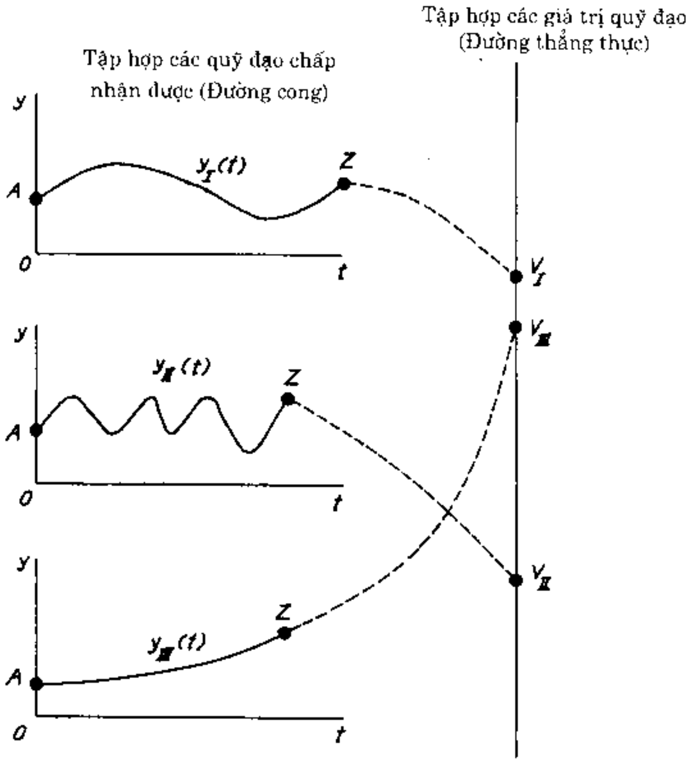
Hình 1.2

1.2. Khái niệm phiếm hàm

Mối quan hệ giữa các quỹ đạo (đường đi) và các giá trị quỹ đạo đáng để chúng ta chú ý, vì nó biểu thị một loại ánh xạ - không phải ánh xạ từ các số thực sang các số thực như trong *hàm số* thông thường, mà ánh xạ từ các đường đi (các đường cong) sang các số thực (các chỉ số đánh giá kết quả). Chúng ta hãy tưởng tượng các đường đi đang quan tâm như là các đường đi

theo thời gian, và ký hiệu chúng là $y_I(t)$, $y_{II}(t)$, ... Khi đó ánh xạ này như chỉ ra trên Hình 1.3, trong đó V_I, V_{II} biểu thị các giá trị của đường đi liên thuộc. Do đó, ký hiệu chung đối với ánh xạ phải là $V[y(t)]$. Nhưng phải nhấn mạnh rằng ký hiệu này khác về căn bản với ký hiệu hàm hợp $g[f(x)]$. Trong hàm hợp, g là một hàm số của f, và f đến lượt nó là một hàm số của x; như vậy, g trong phân tích cuối cùng là một hàm số của x. Cái khác trong ký hiệu $V[y(t)]$, là ở chỗ thành phần y(t) trở thành như một đơn vị có tính toàn bộ - để chỉ đường đi theo thời gian – và do đó ta không nên cho V là hàm số của t. Thay vì như vậy, V cần hiểu là một hàm của "y(t)".

Để phân biệt rõ sự khác nhau đó, kiểu ánh xạ này ta gọi là: *phiếm hàm*. Để tránh lầm lẫn, có thể viết phiếm hàm là V[y] hoặc V{y}, bằng cách đó nhấn mạnh sự kiện là: chính thay đổi trong vị trí của toàn đường đi y – thay đổi trong đường đi y – chứ không phải thay đổi trong t, mang lại thay đổi trong giá trị của đường đi V. Ký hiệu mà ta sử dụng là V[y]. Lưu ý rằng khi ký hiệu y được dùng để chỉ một trạng thái nào đó, nó là đủ và thể hiện ra chẳng hạn như y(0) (hoặc $y(t_0)$) đối với trạng thái đầu và y(T) (hoặc $y(t_1)$) đối với trạng thái cuối. Trái lại, theo nghĩa quỹ đạo (đường đi), t trong y(t) không được gán một giá trị đặc biệt. Sau đây, khi ta muốn nhấn mạnh khoảng thời gian đặc biệt liên quan tới một đường đi hay một đoạn của nó, ta sẽ đơn giản dùng ký hiệu $y[0,T]$ hoặc $y[0,\tau)$. Tuy nhiên, thường thì chúng ta đơn giản dùng ký hiệu y(t), hoặc sử dụng thuật ngữ "đường đi y". Đường đi theo thời gian tối ưu khi đó được ký hiệu bởi $y^*(t)$, hay quỹ đạo (đường đi) y^*.



Hình 1.3

II. BÀI TOÁN VỚI CÁC ĐIỂM CUỐI BIẾN ĐỔI VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN HOÀNH

Trong phát biểu trước đây của ta về bài toán tối ưu động, chúng ta đã đơn giản hoá các vấn đề bằng việc giả định một điểm đầu đã cho [một cặp có thứ tự (0, A)] và một điểm cuối đã cho [một cặp có thứ tự (T, Z)]. Giả thiết về một điểm đầu đã cho có thể không là giới hạn quá mức, bởi vì, trong bài toán thông thường, kế hoạch tối ưu phải bắt đầu từ một vị trí xuất phát đặc biệt nào đó, chẳng hạn vị trí hiện thời. Do đó, chúng ta sẽ giữ lại giả thiết này trong hầu hết các phần sau. Mặt khác, vị trí cuối rất có thể trở thành một vấn đề mềm dẻo, mà không có sự cần thiết nào để nó phải được xác định trước. Thí dụ, chúng ta có thể gặp bài toán trong đó chỉ thời gian cuối cố định, nhưng hoàn toàn tự do chọn trạng thái cuối (chẳng hạn, vốn tại thời điểm cuối). Mặt khác, chúng ta cũng có thể gán một trạng thái cuối đã được chỉ định chặt chẽ (chẳng hạn, tốc độ lạm phát mục tiêu), nhưng tự do chọn thời gian cuối (thời gian đạt mục tiêu). Trong trường hợp như vậy,

điểm cuối trở thành một phần của lựa chọn tối ưu. Trong mục này ta sẽ thảo luận vắn tắt về một vài kiểu điểm cuối biến đổi.

Chúng ta sẽ cho biến giai đoạn là thời gian liên tục. Ta cũng sẽ giữ lại các ký hiệu 0 và T cho *thời gian* đầu và *thời gian* cuối, và các ký hiệu A và Z cho *các trạng thái* đầu và cuối. Khi không có sự lầm lẫn nào có thể nảy sinh, ta cũng có thể dùng A và Z để ký hiệu các *điểm* đầu và cuối (cặp có thứ tự), đặc biệt trong các biểu đồ.

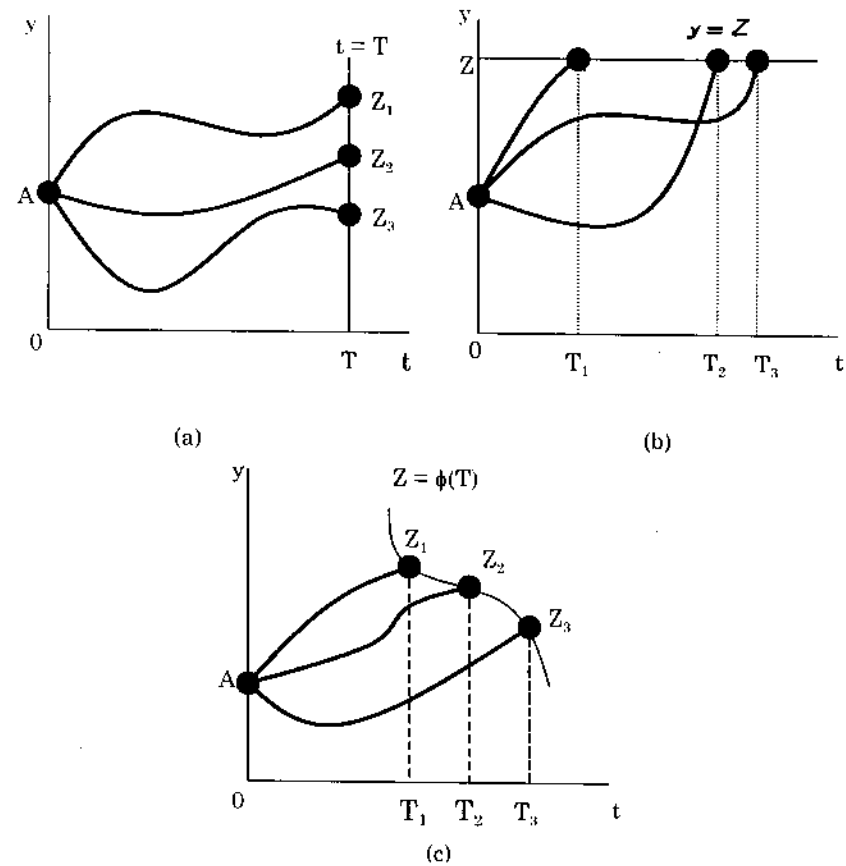
2.1. Các loại điểm cuối biến đổi

Loại điểm cuối biến đổi thứ nhất, có thể cho một thời gian cuối cố định T, nhưng một trạng thái cuối tự do. Trong Hình 1.4 a, trong khi tầm kế hoạch là cố định ở thời gian T, bất kỳ điểm nào trên đường thẳng đứng $t = T$ đều có thể chấp nhận như một điểm cuối, như Z_1, Z_2 và Z_3. Trong một bài toán như vậy, nhà kế hoạch rõ ràng tự do hơn nhiều trong việc chọn đường đi tối ưu, và do đó, sẽ có thể đạt được một giá trị của đường đi tối ưu V* tốt hơn – hay ít nhất không xấu hơn – so với nếu điểm cuối được chỉ định chặt chẽ.

Loại bài toán này thường được gọi là *bài toán tầm thời gian cố định*, hay *bài toán thời gian cố định*, nghĩa là thời gian cuối của bài toán là cố định, không tự do. Mặc dù nói rõ về tầm thời gian, tên gọi này không cho mô tả đầy đủ của bài toán, bởi vì không nói gì về trạng thái cuối. Chỉ bằng ẩn ý mà chúng ta hiểu rằng trạng thái cuối là tự do. Một đặc trưng có nhiều thông tin hơn của bài toán này là hình ảnh trực quan trong Hình 1.4a. Để cho phù hợp với hình ảnh này, ta sẽ gọi bài toán thời gian cố định là *bài toán đường thẳng cuối thẳng đứng*.

Ta xét một thí dụ kinh tế của bài toán này, giả sử một công ty độc quyền muốn thiết lập một đường đi giá cả tối ưu (trơn) trên một thời kỳ kế hoạch đã cho, chẳng hạn 12 tháng, với mục đích cực đại lợi nhuận. Giá hiện thời tham gia vào bài toán như trạng thái đầu. Nếu không có hạn chế bằng pháp lý nào về giá cả đang có hiệu lực, giá cuối sẽ hoàn toàn do công ty quyết định. Tuy nhiên, vì giá âm là không thể thừa nhận, ta phải loại khỏi việc xem xét tất cả những $P < 0$. Kết quả là ta có một *đường cuối thẳng đứng cụt*, đó là điều mà Hình 1.4a đã chỉ ra. Ngoài ra, nếu kỳ vọng một giá

trần chính thức có hiệu lực tại thời gian cuối $t = T$ thì một sự cắt cụt thêm đối với đường thẳng dứng này là cần thiết.



Hình 1.4

Kiểu bài toán điểm cuối biến đổi thứ hai đảo ngược vai trò của thời gian cuối và trạng thái cuối; bây giờ trạng thái cuối là cho trước nhưng thời gian cuối là tự do. Trong Hình 1.4b, đường nằm ngang $y = Z$ tạo thành tập các điểm cuối chấp nhận được. Mỗi điểm này, tuỳ thuộc vào đường đi được chọn, có thể gắn với một thời gian cuối khác nhau, thí dụ T_1, T_2, và T_3. Lại một lần nữa, độ tự do lựa chọn lớn hơn so với trường hợp điểm cuối cố định. Nhiệm vụ của nhà lập kế hoạch có thể là, chẳng hạn, sản xuất một hàng hoá với đặc trưng chất lượng riêng (thép với sức bền đã cho) với chi phí thấp nhất, nhưng lại hoàn toàn tuỳ ý về độ dài của chu kỳ sản xuất. Điều này

cho phép nảy sinh một phương pháp sản xuất lâu hơn nhưng ít tốn phí hơn mà nó không thể được chấp nhận dưới một kế hoạch sản xuất cấp bách.

Kiểu bài toán này được gọi chung là *bài toán điểm cuối cố định*. Từ tên gọi này có thể nảy sinh một sự lầm lẫn, bởi vì từ "điểm cuối cùng" được sử dụng ở đây chỉ để chỉ trạng thái cuối Z chứ không phải toàn bộ điểm cuối cùng theo nghĩa cặp có thứ tự (T, Z). Để tận dụng hình ảnh trực quan của bài toán trong Hình 1.4b, ta sẽ gọi bài toán điểm cuối cùng cố định một cách khác đi là *bài toán đường cuối nằm ngang*.

Trong bài toán điểm cuối biến đổi thứ hai thì coi hàm mục tiêu là cực tiểu thời gian sản xuất (chứ không phải cực tiểu chi phí). Trong trường hợp đó, đường đi với thời gian cuối T_1 trở nên đáng chọn hơn đường đi kết thúc tại T_2, bất kể chi phí nào. Loại bài toán này được gọi là bài toán thời gian tối ưu.

Với loại bài toán này, cả trạng thái cuối lẫn thời gian cuối đều không được định trước riêng rẽ, nhưng chúng bị ràng buộc với nhau thông qua một phương trình ràng buộc dạng $Z = \phi(T)$. Như trong Hình 1.4c, phương trình như vậy biểu thị bằng đồ thị như một *đường cuối* (hoặc trong thứ nguyên cao hơn, như một *mặt cuối*) liên hệ một thời gian cuối riêng (chẳng hạn, T_1) với một trạng thái cuối tương ứng (Z_1). Mặc dù bài toán để cho cả T và Z mềm dẻo, nhà kế hoạch thực sự chỉ có một bậc tự do trong việc chọn điểm cuối. Ta sẽ gọi loại bài toán này là *bài toán đường cuối* (hay *mặt cuối*).

2.2. Điều kiện hoành

Nét chung của các bài toán điểm cuối biến đổi, người lập kế hoạch có nhiều hơn một bậc tự do so với trong trường hợp điểm cuối cố định. Nhưng sự kiện này nói rằng, trong việc rút ra lời giải tối ưu, cần thêm một điều kiện phụ để xác định rõ quỹ đạo (đường đi) chính xác được chọn. Để làm rõ điều này, ta so sánh các điều kiện biên đối với đường đi tối ưu trong trường hợp điểm cuối cố định tương phản với trường hợp điểm cuối biến đổi. Trong trường hợp điểm cuối cố định, quỹ đạo (đường đi) tối ưu phải thoả mãn các điều kiện biên (đầu và cuối):

$$y(0) = A \text{ và } y(T) = Z \quad (T, A, \text{ và } Z \text{ cho trước})$$

Trong trường hợp điểm cuối biến đổi, điều kiện đầu y(0) = A vẫn phù hợp với giả thiết. Nhưng vì T và/hoặc Z bây giờ biến đổi, điều kiện cuối y(T) = Z không thể chỉ rõ cho ta quỹ đạo (đường đi) tối ưu nữa. Như Hình 1.4 chỉ ra, tất cả các đường đi chấp nhận được kết thúc tại Z_1, Z_2 hoặc các vị trí cuối khác có thể có, đều thoả mãn điều kiện y(T) = Z. Do đó, chúng ta cần một điều kiện cuối có thể phân biệt được chắc chắn quỹ đạo (đường đi) tối ưu với các quỹ đạo (đường đi) chấp nhận được khác. Điều kiện như vậy được gọi là *điều kiện hoành*, bởi vì nó thường thể hiện như mô tả về quỹ đạo (đường đi) tối ưu cắt ngang đường thẳng cuối hay đường cong cuối như thế nào.

2.3. Điểm đầu biến đổi

Mặc dù ta đã giả định rằng chỉ điểm cuối có thể biến đổi, nội dung đã thảo luận ở trên cũng có thể cũng được sử dụng vào trường hợp điểm đầu biến đổi. Như vậy, có thể có một đường cong đầu biểu thị các tổ hợp chấp nhận được của thời gian khởi đầu và trạng thái khởi đầu. Hoặc có thể có một đường thẳng khởi đầu thẳng đứng t = 0, chỉ ra rằng thời gian khởi đầu 0 là cho trước, nhưng trạng thái khởi đầu không hạn chế. Nếu điểm đầu là biến đổi, đặc trưng của đường đi tối ưu cũng phải có một điều kiện hoành khác ở vị trí của phương trình y(0) = A để mô tả đường đi tối ưu cắt ngang các đường thẳng đầu hay đường cong đầu như thế nào.

III. PHIẾM HÀM MỤC TIÊU

3.1. Dạng tích phân của phiếm hàm

Một quỹ đạo (đường đi) tối ưu theo định nghĩa là quỹ đạo (đường đi) làm cực đại hoặc cực tiểu giá trị của quỹ đạo (đường đi) V[y]. Vì bất cứ quỹ đạo (đường đi) y phải tất yếu đi qua một khoảng thời gian, giá trị tổng cộng của nó phải là một tổng. Trong điều kiện rời rạc, giá trị của đường đi là tổng các giá trị của các cung thành phần của nó. Cái tương xứng của một tổng như vậy trong trường hợp thời gian liên tục là một tích phân xác định $\int_0^T$ (giá trị cung) dt. Nhưng ta biểu diễn "giá trị cung" đối với trường hợp liên tục như thế nào?

Để trả lời câu hỏi này, trước hết ta phải nhận dạng được một "cung" trên quỹ đạo (đường đi) theo thời gian liên tục. Có ba kiểu thông tin cần

thiết đối với việc nhận dạng cung: (1) giai đoạn bắt đầu (thời gian), (2) trạng thái bắt đầu, và (3) hướng mà cung đó đi theo. Với thời gian liên tục, vì mỗi cung là vô cùng bé về chiều dài, ba điểm này tương ứng được thay bằng: (1) t, (2) y(t), và (3) $y'(t) \equiv dy/dt$. Thí dụ, trên quỹ đạo (đường đi) y_I đã cho, cung gắn với một thời điểm đặc biệt t_0 được đặc trưng bởi một giá trị duy nhất $y_I(t_0)$ và một độ dốc duy nhất $y'_I(t_0)$. Nếu tồn tại một hàm F nào đó gán giá trị cung cho các cung, thì giá trị của cung nói trên có thể được viết là $F[t_0, y_I(t_0), y'_I(t_0)]$. Tương tự, trên một đường đi khác, y_{II}, độ cao và độ dốc của cung tại $t = t_0$ lần lượt là $y_{II}(t_0)$ và $y'_{II}(t_0)$, và các giá trị cung là $F[t_0, y_{II}(t_0), y'_{II}(t_0)]$. Suy ra rằng biểu thức tổng quát đối với các giá trị cung là $F(t, y(t), y'(t)]$, và phiếm hàm giá trị của quỹ đạo (đường đi) – tổng của các giá trị cung – có thể được viết một cách tổng quát bằng tích phân xác định

$$V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]dt \tag{1.1}$$

V[y] nhấn mạnh rằng chính sự thay đổi trong quỹ đạo (đường đi) y (y_I so với y_{II}) làm thay đổi độ lớn của V. Mỗi quỹ đạo (đường đi) y khác nhau gồm tập hợp các cung khác nhau trong khoảng thời gian [0,T], mà thông qua hàm gán giá trị cung mà nó nhận các tập hợp giá trị cung khác nhau. Tích phân xác định cộng các giá trị cung này trên mỗi quỹ đạo (đường đi) y thành một giá trị của quỹ đạo (đường đi).

Nếu có hai biến trạng thái y và z trong bài toán, thì ta phải tính đến các giá trị cung trên cả quỹ đạo (đường đi) y lẫn z. Khi đó hàm mục tiêu phải được biểu diễn là:

$$V[y,z] = \int_0^T F[t, y(t), z(t), y'(t), z'(t)]dt \;[1] \tag{1.2}$$

Một bài toán với phiếm hàm mục tiêu như trong dạng (1.1) hoặc (1.2) tạo thành bài toán chuẩn. Để đơn giản, ta sẽ thường bỏ đối số thời gian (t) đối với các biến trạng thái và viết hàm dưới dấu tích phân ngắn gọn hơn là F(t, y, y') hoặc F(t, y, z, y', z').

---

[1] Trong cuốn sách này ta ký kiệu $y' = \dfrac{dy}{dt}$ trong chương về phép tính biến phân và để khỏi nhầm, ta ký hiệu $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ trong lý thuyết điều khiển tối ưu.

3.2. Các dạng phiếm hàm khác

Đôi khi, tiêu chuẩn tối ưu trong bài toán có thể không phụ thuộc vào các vị trí trung gian nào mà đường đi đi qua, mà có thể chỉ phụ thuộc vào vị trí của điểm cuối đạt tới. Trong trường hợp đó, không có tích phân xác định nào nảy sinh, vì không cần lấy tổng các giá trị cung trên một khoảng. Đúng hơn, phiếm hàm mục tiêu là:

$$V[y] = G[T, y(T)] \tag{1.3}$$

ở đây hàm G phụ thuộc vào những gì xảy ra ở thời gian cuối T.

Cũng có thể xảy ra là cả tích phân xác định trong (1.1) lẫn tiêu chuẩn điểm cuối trong (1.3) đồng thời đưa vào trong phiếm hàm mục tiêu. Khi đó ta có:

$$V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]dt + G[T, y(T)] \tag{1.4}$$

ở đây hàm G gọi là hàm giá trị để lại. Hơn nữa, các phiếm hàm trong (1.3) và (1.4) lại có thể được mở rộng để đưa vào nhiều hơn một biến trạng thái. Thí dụ, với hai biến trạng thái y và z, (1.3) trở thành:

$$V[y,z] = G[T, y(T), z(T)] \tag{1.5}$$

Một bài toán với kiểu phiếm hàm mục tiêu trong (1.3) được gọi là *bài toán Mayer*. Vì chỉ có vị trí cuối là có ý nghĩa trong V, nó cũng được gọi là *bài toán điều khiển cuối*. Nếu (1.4) là dạng phiếm hàm mục tiêu của bài toán, thì ta có *bài toán Bolza*.

Mặc dù bài toán Bolza có vẻ là biểu diễn tổng quát hơn, sự thật là ba loại bài toán – chuẩn, Mayer và Bolza – tất cả có thể chuyển đổi được với nhau.

IV. NHỮNG CÁCH TIẾP CẬN KHÁC NHAU ĐỐI VỚI TỐI ƯU ĐỘNG

Để giải quyết bài toán đã phát biểu trên đây, có ba cách tiếp cận chủ yếu. Ở trên chúng ta đã nói đến phép tính biến phân và quy hoạch động. Tuy nhiên còn một cách tiếp cận là tổng quát hoá mạnh của phép tính biến phân, mang tên lý thuyết điều khiển tối ưu. Ta sẽ giới thiệu vắn tắt từng phương pháp.

4.1. Phép tính biến phân

Bắt nguồn từ cuối thế kỷ 17, phép tính biến phân là cách tiếp cận cổ điển đối với bài toán tối ưu động. Bài toán sớm nhất là bài toán xác định hình dạng của một bề mặt xoay vòng để gặp lực cản ít nhất khi đi qua một chất cản nào đó (bề mặt xoay với diện tích cực tiểu). Issac Newton đã giải bài toán này và phát biểu các kết quả trong các nguyên lý của ông, công bố năm 1687. Các nhà toán học khác của lĩnh vực đó cũng đã nghiên cứu các bài toán có bản chất tương tự. Các bài toán này có thể được biểu thị bởi dạng tổng quát sau đây:

$$\text{Cực đại (cực tiểu)} \quad V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]dt \qquad (1.6)$$

$$\text{Với ràng buộc} \quad y(0) = A \quad (\text{A cho trước}) \qquad (1.7)$$

$$\text{và} \quad y(T) = Z \quad (\text{T, Z cho trước}) \qquad (1.8)$$

Bài toán (1.6)-(1.8), với một phiếm hàm tích phân theo một biến trạng thái đơn, với các điểm đầu và cuối hoàn toàn xác định, và không có ràng buộc nào, được gọi là *bài toán cơ bản* (hay *bài toán đơn giản nhất*) của phép tính biến phân.

Để các bài toán như vậy có ý nghĩa, cần thiết là phiếm hàm phải khả tích. Chúng ta sẽ giả định điều kiện này thoả mãn bất cứ khi nào ta viết một tích phân dạng tổng quát như trong (1.6)-(1.8). Thêm nữa, chúng ta sẽ giả định rằng tất cả các hàm xuất hiện trong bài toán là liên tục và khả vi liên tục. Giả thiết này là cần thiết, bởi vì cơ sở phương pháp luận đằng sau phép tính biến phân rất gần với phương pháp luận của phép tính vi phân cổ điển. Sự khác nhau chủ yếu là, thay vì làm việc với vi phân dx thay đổi giá trị của $y = f(x)$, bây giờ ta sẽ làm việc với "biến phân" của toàn bộ đường cong $y(t)$ tác động lên giá trị của phiếm hàm $V[y]$.

4.2. Lý thuyết điều khiển tối ưu

Nghiên cứu tiếp theo của các bài toán biến phân đã dẫn tới sự phát triển phương pháp hiện đại hơn là *lý thuyết điều khiển tối ưu*. Trong lý thuyết điều khiển tối ưu, bài toán tối ưu động được xem như bao gồm ba (chứ không phải hai) loại biến. Ngoài biến thời gian t và biến trạng thái $y(t)$, ta còn xem xét biến điều khiển $u(t)$. Thực tế, chính loại biến sau đã cho

lý thuyết điều khiển tối ưu tên gọi của nó và chiếm vị trí trung tâm trong cách tiếp cận mới đối với tối ưu động.

Việc tập trung sự chú ý vào biến điều khiển làm cho biến trạng thái bị hạ xuống hàng thứ hai. Điều đó là chấp nhận được chỉ nếu quyết định đối với đường đi điều khiển u(t), một khi đã cho điều kiện đầu đối với y, sẽ xác định hoàn toàn đường đi của biến trạng thái y(t) như một sản phẩm kèm theo. Ta đi đến định nghĩa sau:

4.2.1. Định nghĩa phương trình chuyển động (hay phương trình chuyển tiếp hay phương trình trạng thái)

Trong bài toán điều khiển tối ưu, phương trình liên hệ y với u dạng $\frac{dy}{dt} = f[t, y(t), u(t)]$ được gọi là phương trình chuyển động (hay phương trình chuyển tiếp hay phương trình trạng thái).

Phương trình này nói rằng: tại một thời điểm bất kỳ, khi đã cho giá trị của biến trạng thái, lựa chọn điều khiển u của người lập kế hoạch sẽ lái biến trạng thái y như thế nào qua thời gian. Khi ta đã tìm được đường đi tối ưu của biến điều khiển u*(t), từ phương trình chuyển động có thể xây dựng đường đi tối ưu của biến trạng thái liên quan y*(t).

4.2.2. Bài toán điều khiển tối ưu

Bài toán điều khiển tối ưu (1.9)-(1.12) tương ứng với bài toán của phép tính biến phân (1.6)-(1.8) như sau:

$$\text{Cực đại (hay cực tiểu)} \quad V[u] = \int_0^T F[t, y(t), u(t)]dt \tag{1.9}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y}(t) = f[t, y(t), u(t)] \tag{1.10}$$

$$y(0) = A \quad \text{(A cho trước)} \tag{1.11}$$

$$\text{và} \quad y(T) = Z \quad \text{(T, Z cho trước)} \tag{1.12}$$

$$\text{trong đó} \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$$

Lưu ý rằng, trong (1.9)-(1.12), hàm mục tiêu không chỉ chứa u như một đối số mà nó cũng thay đổi từ V(y) thành V(u). Điều này phản ánh rằng u bây giờ là công cụ cơ bản của tối ưu hoá. Tuy nhiên, bài toán điều khiển

này liên quan mật thiết với bài toán của phép tính biến phân (1.6)-(1.8). Thực tế, bằng cách thay $\dot{y}(t)$ bằng u(t) trong biểu thức dưới dấu tích phân trong (1.6)-(1.8), và lấy phương trình vi phân $\dot{y}(t) = u(t)$ làm phương trình chuyển động, ta thu được ngay (1.9)-(1.12).

Một sự phát triển có ý nghĩa nhất trong lý thuyết điều khiển tối ưu là *nguyên lý cực đại*. Nguyên lý này thường được gắn với nhà toán học Nga L. S. Pontryagin. Sức mạnh của nguyên lý đó là ở khả năng mà nó giải quyết trực tiếp những ràng buộc nhất định đối với biến điều khiển. Đặc biệt, nó cho phép nghiên cứu các bài toán trong đó các giá trị chấp nhận được của biến điều khiển u bị giới hạn trong một tập lồi đóng, bị chặn $\mathcal{U}$ nào đó. Thí dụ, tập hợp $\mathcal{U}$ có thể là khoảng đóng [0, 1], nếu đòi hỏi $0 \le u(t) \le 1$ qua suốt kỳ kế hoạch. Nếu chẳng hạn khuynh hướng tiết kiệm biên là biến điều khiển thì một ràng buộc như vậy, $0 \le s(t) \le 1$, có thể rất thích hợp. Tóm lại, bài toán của lý thuyết điều khiển tối ưu như (1.9)-(1.12), ngoại trừ là có thể thêm vào nó một ràng buộc như:

$$u(t) \in \mathcal{U} \text{ với } 0 \le t \le T$$

4.3. Quy hoạch động

Nhà toán học Mỹ Richard Bellman coi quy hoạch động là một cách tiếp cận khác đối với bài toán điều khiển phát biểu trong (1.9)-(1.12). Các tính chất tiêu biểu quan trọng nhất của cách tiếp cận này là: Thứ nhất, nó lồng ghép bài toán điều khiển đã cho vào họ các bài toán điều khiển, với hệ quả là trong việc giải bài toán đã cho, ta thực sự đang giải toàn bộ họ các bài toán này. Thứ hai, đối với mỗi thành viên trong họ bài toán này, ta tập trung sự chú ý chủ yếu vào giá trị tối ưu của phiếm hàm V* chứ không vào các thuộc tính của đường đi của trạng thái tối ưu y*(t) (như trong phép tính biến phân) hoặc quỹ đạo điều khiển tối ưu u*(t) (như trong lý thuyết điều khiển tối ưu). Thực tế, một *hàm giá trị tối ưu* – gán một giá trị tối ưu cho mỗi thành viên của họ bài toán này - được sử dụng như một đặc trưng của lời giải.

B. MỘT SỐ MÔ HÌNH TỐI ƯU ĐỘNG TRONG KINH TẾ

Trong mục này chúng ta đề cập đến một số mô hình động trong một số lĩnh vực của nền kinh tế như: đầu tư, tiết kiệm, tiêu dùng, hành vi của độc quyền, thương mại và phát triển, vấn đề định giá tài sản và tiêu dùng;

Mô hình lao động không thể phân chia được và chu kỳ kinh doanh; Mô hình xác định chính sách chống ô nhiễm; Cân bằng trong nền kinh tế phi tập trung với lạm phát và thuế; Kinh tế học về các tài nguyên có thể cạn; Mô hình người đại diện; Lý thuyết cặp đầu tư động; Các mô hình tăng trưởng hai khu vực; Vấn đề đầu tư có chi phí điều chỉnh. Các mô hình này được trình bày một cách vắn tắt nhằm giới thiệu tính đa dạng của bài toán tối ưu động.

Trong các chương tiếp theo, chúng ta sẽ đưa ra cách thức giải hầu hết các mô hình đó.

I. MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG KINH TẾ

1.1. Mô hình tăng trưởng kinh tế phi ngẫu nhiên của Brock và Mirman

Ta xét quá trình tăng trưởng kinh tế trải qua một dãy vô hạn các thời kỳ t = 0, 1, 2,... Ở thời kỳ t, đầu vào của quá trình là số tài sản vốn K_t và số lao động L_t, đầu ra của quá trình là Q_t bao gồm sản phẩm làm ra trong thời kỳ Y_t và số tài sản vốn còn lại ở cuối thời kỳ $(K_t - D_t)$;

$$Q_t = Y_t + (K_t - D_t) \tag{1.13}$$

ở đây D_t là số tài sản đã thực sự được đưa vào sản xuất.

Đầu ra của thời kỳ t, Q_t được dành cho tiêu dùng C_t và phần còn lại được dùng làm vốn sản xuất ở thời kỳ t + 1, K_{t+1}, nghĩa là:

$$Q_t = C_t + K_{t+1} \tag{1.14}$$

Giả thiết mối liên hệ giữa đầu ra và đầu vào của quá trình được miêu tả bằng hàm sản xuất dạng Cobb - Douglas:

$$Q_t = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1,\ A > 0 \tag{1.15}$$

Từ (1.14) và (1.15) ta có biểu thức:

$$C_t + K_{t+1} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{1.16}$$

Đặt $k_t = K_t/L_t$, $c_t = C_t/L_t$ là vốn và tiêu dùng tính trên một đơn vị lao động, hệ thức (1.16) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$c_t + k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} \tag{1.17}$$

Giả sử lợi ích tiêu dùng ở thời kỳ t được đo bằng hàm lợi ích $u_t = \beta^t \ln c_t$, trong đó β^t với $0 < \beta < 1$ là hệ số qui đổi về giá trị tương đương ở thời kỳ $t = 0$, nó cũng được gọi là hệ số chiết khấu.

Brock và Mirman (1972) đặt và xét bài toán tăng trưởng kinh tế sau:

Chọn các dãy $\{c_t\}$ $t = 0, 1, 2,...$ làm cực đại lợi ích tiêu dùng

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t \tag{1.18}$$

với số vốn k_0 cho trước và tuân theo ràng buộc:

$$k_{t+1} + c_t = Ak^{\alpha}_t, \tag{1.19}$$

Trong đó $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

Để giải bài toán trên ta xem k_t là biến trạng thái và (1.19) là phương trình chuyển trạng thái.

1.2. Mô hình tăng trưởng ngẫu nhiên

Hãy xét mô hình của Brock-Mirman dưới dạng bài toán tăng trưởng ngẫu nhiên sau:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t, \tag{1.20}$$

thoả mãn $$c_t + k_{t+1} \le Ak_t^{\alpha}\theta_t \tag{1.21}$$

Giá trị đầu vốn tại $t = 0$ k_0 cho trước, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$,

ở đây $\{\theta_t\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên có phân phối độc lập và đồng nhất, với $\ln \theta_t$ tuân theo phân phối chuẩn với trung bình bằng 0 và phương sai không đổi bằng σ^2, E_0 là kỳ vọng toán có điều kiện trên tập thông tin đã biết ở đầu thời kỳ 0.

1.3. Mô hình tăng trưởng hai khu vực

Ta xét mô hình hai khu vực. Ở thời gian t, khu vực 1 sản xuất ra hàng hoá c_t nhờ việc sử dụng vốn k_t^1 mà được sản xuất trong khu vực 2. Trong thời gian t, khu vực 2 sản xuất lượng vốn k_{t+1} mà sẽ được sử dụng trong thời kỳ t + 1 của 2 khu vực. Để sản xuất ra k_{t+1}, khu vực 2 cần một lượng k_t^2 hàng hoá vốn. Người lập kế hoạch hoá xã hội giải bài toán sau đây ở thời kỳ 0:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ U(c_t), \beta \in [0,1] \tag{1.22}$$

Với các ràng buộc:

$$\forall t, 0 \le c_t \le f_t^c(k_t^1) \tag{1.23}$$

$$0 \le k_{t+1} \le f_t^k(k_t^2) \tag{1.24}$$

$$k_t^1 + k_t^2 \le k_t \tag{1.25}$$

$$k_t^1 \ge 0, k_t^2 \ge 0 \tag{1.26}$$

$k_0 \ge 0$ đã cho.

Các hàm f^c, f^k là các hàm sản xuất của khu vực sản xuất hàng tiêu dùng và khu vực sản xuất tư liệu sản xuất, chúng được giả thiết khả vi hai lần, lõm ngặt.

II. MÔ HÌNH TIÊU DÙNG

2.1. Mô hình tiêu dùng vòng đời dưới điều kiện bất định của Hall

Chúng ta xét mô hình chu kỳ sống dưới điều kiện bất định sau đây:

$$\max E_t \sum_{i=0}^{T-t} (1+\delta)^{-i} U(c_{t+i})$$

Với ràng buộc:

$$\sum_{i=0}^{T-t} (1+r)^{-i}(c_{t+i} - w_{t+i}) = A_t$$

trong đó:

E_t là kỳ vọng có điều kiện trên tập hợp các thông tin có thể có ở thời kỳ t,

U() là hàm lợi ích một thời kỳ với giả thiết là lõm ngặt, khả vi hai lần,

δ là suất phí ưa thích tiêu dùng chủ quan,

r là tỷ lệ lợi tức thực được giả thiết là hằng số theo thời gian,

T là độ dài tuổi thọ kinh tế,

c là tiêu dùng,

w_t là thu nhập ngẫu nhiên,

A_t là tài sản ngoài vốn con người.

2.2. Tính ỳ của thói quen trong tiêu dùng 1

Xét bài toán chọn dãy tiêu dùng c_t làm cực đại hàm mục tiêu, nghĩa là:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}), \quad 0 < \beta < 1, \ \gamma > 0 \tag{1.27}$$

với ràng buộc $c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^{\alpha}$ (1.28)

$A > 0$ (1.29)

$0 < \alpha < 1$ (1.30)

$k_0 > 0$, và c_{-1} cho trước

Ở đây c_t là tiêu dùng tại t, k_t là lượng vốn ở đầu thời kỳ t. Hàm lợi ích hiện thời ($\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}$) là để biểu thị tính ỳ của thói quen trong tiêu dùng.

2.3. Tính ỳ của thói quen trong tiêu dùng 2

Xét dạng tổng quát hơn của bài toán trên là:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, c_{t-1}), \qquad 0 < \beta < 1 \tag{1.31}$$

với ràng buộc: $c_t + k_{t+1} \leq f(k_t)$, $k_0 > 0$, c_{-1} cho trước,

$U(c_t, c_{t-1})$ khả vi liên tục hai lần, bị chặn, tăng theo cả c_t và c_{t-1}, lõm theo (c_t, c_{t-1}), và $f'(0) = +\infty$, $f' > 0$, $f'' < 0$.

2.4. Học cách hưởng thụ thời gian rỗi

Giả sử hàm lợi ích của người công nhân có dạng U(.) phụ thuộc vào lượng hàng hoá thị trường sản xuất được tiêu dùng, c_{1t}, và cũng phụ thuộc lượng hàng hoá gia đình sản xuất, c_{2t}. Để có được các hàng hoá thị trường, công nhân đó phải giành một lượng thời gian nào đó, l_{1t}, cho các hoạt động thị trường để nhận tiền công w_t (trên một đơn vị thời gian) đo bằng hàng tiêu dùng. Công nhân đó coi tiền công là cho trước và ngoài sự điều khiển của công nhân. Không có sự vay mượn hay cho vay. Biết rằng tiền công trên thị trường phát triển theo luật chuyển động $w_{t+1} = h(w_t)$.

Lượng hàng hoá gia đình sản xuất phụ thuộc lượng "tinh thông" mà công nhân có ở đầu kỳ mà ta gán nhãn a_t. Lượng "tinh thông" này giảm với tốc độ δ và có thể tăng do việc giành thời gian cho các hoạt động ngoài thị trường. Tóm lại bài toán là như sau:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{1t}, c_{2t}), \qquad 0 < \beta < 1 \tag{1.32}$$

với các ràng buộc:

$c_{1t} < w_{1t} l_{1t}$ (ràng buộc ngân sách) (1.33)

$c_{2t} \le f(a_t)$ (hàm sản xuất của hàng hoá gia đình sản xuất) (1.34)

$a_{t+1} \le (1 - \delta)a_t + l_{2t}$ (luật chuyển động của lượng tinh thông) (1.35)

$l_{1t} + l_{2t} \le 1$ (giới hạn về sử dụng thời gian) (1.36)

$w_{t+1} = h(w_t)$ (luật chuyển động đối với tiền công) (1.37)

$a_0 > 0$ (cho trước) (1.38)

Giả sử rằng u( ) và f( ) lõm ngặt, khả vi hai lần.

III. MÔ HÌNH ĐẦU TƯ

3.1. Mô hình Jorgenson

Trong lý thuyết tân cổ điển của Jorgenson về đầu tư, giả thiết công ty sử dụng 2 đầu vào là vốn K và lao động L để sản xuất theo "hàm sản xuất tân cổ điển" với đầu ra Q = Q(K, L) cho phép thay thế giữa hai đầu vào. Điểm này phân biệt nó với lý thuyết gia tốc về đầu tư trong đó vốn gắn với đầu ra theo một tỷ lệ cố định. Hàm sản xuất tân cổ điển thường đi kèm với các giả thiết về sản phẩm biên dương nhưng giảm dần (Q_K, $Q_L > 0$; Q_{KK}, $Q_{LL} < 0$) và hiệu quả không đổi theo quy mô.

Doanh thu bằng tiền của công ty tại thời điểm bất kỳ là PQ, trong đó P là giá sản phẩm cho trước. Tiền chi ra của nó tại thời điểm bất kỳ gồm tiền trả công, WL (W ký hiệu định mức tiền công), và chi tiêu của công ty cho vốn mới, mI_g (m ký hiệu giá cả của "máy móc", I_g- tổng đầu tư gồm đầu tư ròng K' cộng với khấu hao δK). Như vậy doanh thu ròng tại thời điểm bất kỳ là:

$$PQ(K,L) - WL - m(K' + \delta K)$$

Áp dụng thừa số chiết khấu $e^{-\rho t}$ vào biểu thức này và lấy tổng theo suốt thời gian, ta có thể biểu diễn lượng ròng của giá trị hiện thời N(K,L) của công ty là:

$$N(K,L) = \int_0^{\infty}[PQ(K,L) - WL - m(K'+\delta K)]e^{-\rho t}\,dt \qquad (1.39)$$

Mục tiêu của công ty là cực đại hoá lượng giá trị ròng N của nó bằng việc chọn một đường đi K tối ưu và một đường đi L tối ưu.

3.2. Mô hình Eisner-Strotz

Mô hình Eisner- Strotz tập trung vào đầu tư ròng trong quá trình mở rộng quy mô nhà máy của công ty, do đó, không để ý đến đầu tư thay thế. Giả thiết công ty đã biết lợi nhuận π gắn với vốn K, ta có hàm lợi nhuận π(K). Việc mở rộng nhà máy, phải chịu chi phí điều chỉnh C mà độ lớn của nó thay đổi thuận chiều với tốc độ mở rộng K'(t). Do đó ta có một hàm tăng C = C(K'), mà qua nó những khó khăn bên trong của công ty trong việc điều chỉnh nhà máy cũng như những trở ngại bên ngoài cản trở đầu tư (như áp lực lên việc cung cấp của ngành sản xuất hàng hoá vốn) có thể được tính đến một cách tường minh trong bài toán tối ưu của công ty. Nếu hàm C phản ánh một cách thích hợp những khó khăn này trong điều chỉnh, thì khi đã tìm được đường đi K*(t), ta có thể lấy ngay đạo hàm của nó K*'(t) như là đường đi tối ưu của đầu tư ròng mà không phải sử dụng một cách thức đặc biệt nào giống như cơ chế tăng tốc linh hoạt.

Mục tiêu của công ty là chọn một quỹ đạo K*(t) làm cực đại tổng giá trị hiện thời của lợi nhuận ròng của nó qua thời gian:

$$\text{Cực đại} \quad \Pi[K] = \int_0^{\infty}[\pi(K) - C(K')]e^{-\rho t}\,dt \qquad (1.40)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad K(0) = K_0 \ (K_0 \text{ cho trước})$$

3.3. Đầu tư có chi phí điều chỉnh

Một công ty cực đại giá trị hiện tại của dòng tiền, với những khoản thu tương lai được chiết khấu với tỷ lệ β. Thu nhập tại thời gian t được cho bằng lượng bán, p_tq_t, ở đây p_t là giá hàng hoá, q_t là lượng sản xuất ra. Công ty hoạt động trong thị trường cạnh tranh và do đó coi giá cả là đã cho. Công ty biết rằng giá cả phát triển theo luật chuyển động cho bởi $p_{t+1} = f(p_t)$.

Tổng sản xuất phụ thuộc vào lượng vốn, k_t, và lao động, l_t, và vào bình phương của hiệu số giữa tỷ lệ bán trên đầu tư ở hiện thời, x_t, và tỷ lệ của thời kỳ trước. Điểm sau cùng này bao hàm ý tưởng là những thay đổi trong tỷ lệ bán hàng trên đầu tư đòi hỏi một sự phân bố nào đó các nguồn lực trong nội bộ công ty và do đó làm giảm mức hiệu quả.

Giả sử rằng tiền lương là hằng số và bằng w. Vốn hiện vật giảm giá với tốc độ δ. Bài toán của công ty là:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{p_t q_t - w l_t\}, \quad 0 < \beta < 1 \tag{1.41}$$

với ràng buộc:

$$q_t + x_t \le g\left[k_t, l_t, \left(\frac{q_t}{x_t} - \frac{q_{t-1}}{x_{t-1}}\right)^2\right] \tag{1.42}$$

$$k_{t+1} \le (1-\delta)k_t + x_t, \quad 0 < \delta < 1 \tag{1.43}$$

$$p_t = f(p_t) \tag{1.44}$$

$$k_0 > 0, \ \frac{q_{-1}}{x_{-1}} > 0 \text{ cho trước} \tag{1.45}$$

Ta giả sử rằng g( ) bị chặn, tăng theo hai đối số đầu và giảm theo đối số thứ ba.

3.4. Lý thuyết cặp đầu tư động

Giả sử một người tiêu dùng có thể đầu tư vào nhiều loại tài sản như cổ phiếu hay các tài sản khác... mà các khoản đầu tư này có thể đem lại lợi tức khác nhau. Nhà đầu tư có thể tính toán xem nên đầu tư tổng tài sản của mình vào những khoản nào, bao nhiêu để thu được lợi tức lớn nhất. Trong kinh tế, bài toán này được gọi là bài toán lựa chọn danh mục đầu tư (portfolio) hay lựa chọn cặp đầu tư. Dưới đây ta hãy xét bài toán như vậy trên quan điểm động.

Giả thiết có n tài sản mà nhà đầu tư có thể đầu tư, trong đó tài sản thứ i có tỷ lệ hoàn vốn tại thời gian t là R_{it}. Ở đây R_{it} được giả định là một biến ngẫu nhiên dương bị chặn trên với xác suất 1. Người tiêu dùng cực đại $E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$ bằng cách chọn các s_{it} với i = 1,..., n và t ≥ 0, thoả mãn:

$$c_t + \sum_{i=1}^{n} s_{it} = A_t, \qquad t \geq 0 \tag{1.46}$$

$$A_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} s_{it} R_{it}, \ t \geq 0, A_0 \text{ cho trước} \tag{1.47}$$

$$\lim_{t \to \infty} E_0 \beta^t A_t = 0 \tag{1.48}$$

Ở đây s_{it} là lượng tài sản i mua trong thời kỳ t, c_t là tiêu dùng tại t, E chỉ kỳ vọng. Tại thời gian t, A_t và $R_{i,t-1}$, i = 1, ... , n đã biết, nhưng R_{it}, i = 1, ..., n chưa biết trước khi bắt đầu thời kỳ (t + 1). Ta giả sử rằng R_{it} là quá trình Markov, với xác suất chuyển cho bởi:

$p\{R_t \leq R' \mid R_{t-1} = R\} = F(R', R)$, ở đây R' và R là các véc tơ n chiều.

IV. MÔ HÌNH TIẾT KIỆM XÃ HỘI

4.1. Hành vi tiết kiệm xã hội tối ưu - Mô hình Ramsey

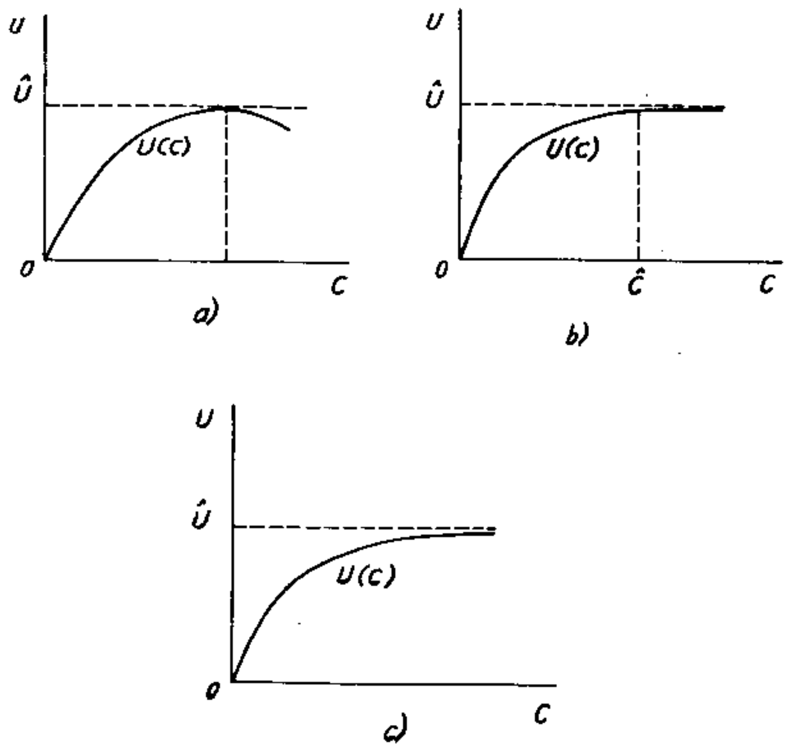
Một trong những ứng dụng đầu tiên của phép tính biến phân vào kinh tế học là mô hình của Frank Ramsey về hành vi tiết kiệm xã hội tối ưu.

Vấn đề trung tâm mà Ramsey nhằm vào là vấn đề phân bố nguồn theo thời gian: ở một thời điểm bất kỳ, bao nhiêu thu nhập của một nước nên dành cho tiêu dùng hiện tại để mang lại phúc lợi hiện tại, và bao nhiêu nên tiết kiệm (và đầu tư) để mở rộng sản xuất và tiêu dùng trong tương lai, và do đó mang lại phúc lợi tương lai?

Giả sử đầu ra (sản lượng) được sản xuất nhờ hai đầu vào là vốn K và lao động L. Hàm sản xuất Q = Q(K, L) là bất biến đối với thời gian, do giả thiết không có tiến bộ về công nghệ. Những giả thiết khác nhằm làm đơn giản mô hình gồm không có hao mòn vốn và không có thay đổi dân số (dừng). Tuy nhiên, lượng dịch vụ lao động cung cấp vẫn có thể thay đổi. Đầu ra Q có thể hoặc để tiêu dùng C hoặc để tiết kiệm S, nhưng phần tiết kiệm luôn luôn dẫn đến đầu tư và tích luỹ vốn. Khi đó ta có Q = C + S = C + K', hay:

$$C = Q(K, L) - K' \tag{1.49}$$

Trong đó K' là đầu tư ròng. Tiêu dùng C đóng góp vào phúc lợi xã hội được mô tả bởi (chỉ số) lợi ích xã hội U(C), với mức lợi ích biên không tăng, $U''(C) \leq 0$. Hàm U(C) đáp ứng đòi hỏi này có dạng như được cho trong Hình 1.5 Giả thiết có một cận trên đối với mức lợi ích U và đạt được tại một mức tiêu dùng hữu hạn $\hat{C}$ như trong Hình1.5a và b, hoặc có thể chỉ tiệm cận đến $\hat{U}$ như trong Hình 1.5.c.



Hình 1.5

Để sản xuất hàng hoá, xã hội phải vất vả tốn sức lao động. Trong kinh tế học người ta đánh giá sự khó nhọc này bằng hàm gọi là hàm khó nhọc của lao động (chi phí sức lực) D(L), với mức khó nhọc biên không giảm, $D''(L) \geq 0$. Do đó, mức lợi ích xã hội ròng là U(C) – D(L), ở đây C và L – như K và Q – là các hàm số của thời gian. Bài toán của người lập kế hoạch kinh tế là cực đại tổng mức lợi ích xã hội cho thế hệ hiện tại cũng như tất cả các thế hệ tương lai:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^{\infty}[U(C)-D(L)]dt \tag{1.50}$$

Hàm lấy tích phân, U chỉ phụ thuộc C, và theo (1.49), C phụ thuộc K, L và K', còn D chỉ phụ thuộc L. Như vậy, bài toán này có hai biến trạng thái, K và L. Tuy nhiên, bởi vì không có số hạng L' nào trong hàm dưới dấu tích phân, bài toán suy biến theo L và nói chung chỉ đặt một điều kiện đầu mút đối với L là không đủ thích hợp.

Vấn đề hội tụ

Không giống như phiếm hàm trong mô hình Eisner-Strotz, hàm dưới dấu tích phân suy rộng trong (1.50) không chứa thừa số chiết khấu. Sự bỏ qua này không phải là do không chú ý; nó xuất phát từ quan điểm của Ramsey cho rằng nhà kế hoạch (thế hệ hiện tại) chiết khấu mức lợi ích của các thế hệ tương lai là "không chính đáng về mặt đạo lý". Để xác lập tính hội tụ, ngay cả nếu hàm lấy tích phân bị chặn trên. Thực tế, vì mức lợi ích ròng là dương khi t ra vô hạn, tích phân này có thể phân kỳ.

Để vượt qua khó khăn này, Ramsey thay (1.50) bằng bài toán sau đây:

$$\text{Cực tiểu} \quad \int_0^{\infty}[B-U(C)+D(L)]dt \tag{1.51}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad K(0) = K_0 \quad (K_0 \text{ cho trước}). \tag{1.52}$$

Ở đây B là mức hạnh phúc nhất- mức lợi ích ròng cực đại cho trước. Vì phiếm hàm mới đo khoảng cách giữa lợi ích đang có so với mức hạnh phúc nhất, nó phải được cực tiểu chứ không cực đại. Nói một cách trực quan, một kế hoạch phân bổ tối ưu sản phẩm phải hoặc đưa xã hội đến mức hạnh phúc nhất hoặc đưa nó tiệm cận tới mức hạnh phúc nhất. Nếu vậy, hàm lấy tích phân trong (1.51) phải không ngừng giảm tới 0, hoặc tiến tới 0 khi $t \to \infty$. Đối với Ramsey, bằng cách đó vấn đề hội tụ được giải quyết. Việc thay (1.50) bằng (1.51), được gọi là "công cụ Ramsey", được chấp nhận rộng rãi như điều kiện đủ của hội tụ.

4.2. Tiết kiệm cá nhân trong điều kiện chắc chắn

Xét bài toán của một người tiêu dùng trong môi trường không ngẫu nhiên. Người tiêu dùng muốn chọn dãy tiêu dùng c_t làm cực đại lợi ích tiêu dùng, nghĩa là:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \quad 0 < \beta < 1 \tag{1.53}$$

thoả mãn: $A_{t+1} = R_t(A_t + y_t - c_t)$,

với A_0 cho trước.

Ở đây R_t, t = 0, 1, ..., là dãy đã biết và cho trước của lãi suất của cải tích luỹ trong một thời kỳ; c_t là tiêu dùng và $U(c_t)$ là lợi ích tiêu dùng; A_t là của cải tích luỹ ở đầu thời kỳ t, và y_t là thu nhập lao động tại t. Thu nhập lao động được giả định là ngoài tầm điều khiển của người tiêu dùng. $R_t = R > 0$ với mọi $t \geq 0$.

Ta định nghĩa trạng thái của hệ thống là (A_t, y_t, R_{t-1}) và định nghĩa điều khiển tại t, là $u_t = R_t^{-1} A_{t+1} = A_t + y_t - c_t$. Rõ ràng biến điều khiển là tổng tiết kiệm. Phương trình chuyển tiếp đối với A_t trở thành $A_{t+1} = R_t \ \hat{u}_t$, do đó không chứa biến trạng thái tại t.

V. MÔ HÌNH NGƯỜI ĐẠI DIỆN

5.1. Mô hình người đại diện

Người đại diện được giả thiết là có tầm kế hoạch vô hạn, trong điều kiện thị trường vốn hoàn hảo và có dự đoán hoàn hảo. Trong môi trường như vậy, người tiêu dùng đại diện phải chọn tỷ lệ tiêu dùng c, cung lao động l, khối lượng vốn k, trái phiếu chính phủ b, để cực đại lợi ích, nghĩa là:

$$\max \int_0^{\infty} U(c,l,g)e^{-\beta t}dt \quad U_c > 0,\ U_{cc} < 0,\ U_l < 0,\ U_{ll} < 0,\ U_g > 0,\ U_{gg} < 0 \tag{1.54}$$

Với các ràng buộc sau:

$$c + \dot{k} + \dot{b} = F(k, l) + rb - T \tag{1.55}$$

Điều kiện đầu:

$$b(0) = b_0, \quad k(0) = k_0 \tag{1.56}$$

trong đó:

g là chi tiêu, tiêu dùng thực của chính phủ,

T là thuế thực cả gói,

β là tỷ lệ ưa thích thời gian của người tiêu dùng, được giả thiết là không đổi.

r là lợi tức thực ngắn hạn,

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt}; \qquad \dot{b} = \frac{db}{dt}$$

Giả thiết:

Đầu ra được sản xuất bằng công nghệ có tính chất là năng suất hiện vật biên dương nhưng giảm dần theo cả hai yếu tố đầu vào vốn và lao động, nghĩa là

$y = F(k, l)$, $F_k > 0$, $F_{kk} < 0$, $F_l > 0$, $F_{ll} < 0$. Để đơn giản ta giả thiết vốn không có khấu hao.

F là hàm sản xuất thuần nhất tuyến tính theo các nhân tố vốn và lao động, nghĩa là $F_{kk}F_{ll} - F_{kl}^2 = 0$, $F_{kl} > 0$. Tất cả đầu tư xảy ra liên tục và không có chi phí điều chỉnh.

5.2. Mô hình có tiền trong hàm lợi ích - Mô hình Sidrauski

Ta xét một phương pháp để có thể đưa tiền vào mô hình cân bằng, đó là đưa tiền vào trong hàm lợi ích. Người tiêu dùng đại diện được giả định cực đại lợi ích, nghĩa là:

$$\max \int_0^\infty U(c,l,g,m)e^{-\beta t}\,dt \tag{1.57}$$

Với ràng buộc:

$$Pc + P\dot{k} + \dot{M} + \dot{B} = PF(k, l) + iB - PT \tag{1.58}$$

Điều kiện đầu:

$$k(0) = k_0,\ M(0) = M_0,\ B(0) = B_0 \tag{1.59}$$

trong đó:

U(c, l, g, m) là hàm lợi ích,

F(k, l) là sản lượng sản xuất của vốn k và lao động l,

m = M/P là cân đối tiền thực tế,

M là lượng tiền danh nghĩa,

P là mức giá,

B là lượng trái phiếu danh nghĩa của chính phủ,

β là tỷ lệ ưa thích thời gian của người tiêu dung,

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt};\ \dot{M} = \frac{dM}{dt}\ \text{ và }\ \dot{B} = \frac{dB}{dt}.$$

i là lợi tức danh nghĩa.

VI. MÔ HÌNH THƯƠNG MẠI

6.1. Mô hình thương mại và phát triển

Dựa trên tư tưởng của Bevan, Collier & Gunning, mô hình này được xây dựng nhằm miêu tả vấn đề đặt ra của các nước đang phát triển phải điều chỉnh cú sốc thương mại dương tạm thời, sự bùng nổ về hàng hoá. Phạm vi đối với việc làm trơn tiêu dùng là bị giới hạn vì nước đó không có thị trường vốn hoàn hảo.

Xét bài toán sau:

$$\max_{c} \int_0^{\infty} U(c)e^{-\rho t}\,dt \tag{1.60}$$

Với ràng buộc:

$$\dot{k} = g(k) - c + b \tag{1.61}$$

trong đó:

c là tiêu dùng,

ρ là suất phí ưa thích thời gian,

$g(k) = f(k) - \delta k$, với g(k) là sản lượng ròng, δ là tỷ lệ khấu hao, f(k) là hàm sản xuất.

b là bùng nổ thu nhập và giả thiết là hằng số dương trong thời kỳ t, còn trong thời kỳ khác bằng không.

Giả thiết: f( ) và U( ) là hàm lõm ngặt.

Lúc đầu nền kinh tế ở trạng thái cân bằng bền vững với lượng vốn là k* trong đó $g'(k^*) = \rho$, $g'(k) = \dfrac{dg}{dk}$; $\dot{k} = \dfrac{dk}{dt}$.

Vấn đề là ở thời gian t = 0, phải chọn quỹ đạo tiêu dùng tối ưu để giải thích cho sự bùng nổ trên khoảng thời gian T.

VII. BÀI TOÁN CỦA CÔNG TY

7.1. Công ty cực đại giá trị hiện thời kỳ vọng của lãi ăn chia

Hãy xét một công ty cực đại giá trị hiện thời kỳ vọng của lãi ăn chia. Giả sử rằng giá cả của hàng hoá do công ty sản xuất là hằng số và chuẩn hoá bằng 1. Sản xuất đòi hỏi sử dụng một đơn vị đầu vào: một loại vốn đặc biệt cho công ty. Tổng sản xuất, $f(k_t)$, được phân chia giữa phần bán ra q_t, và phần dành cho đầu tư, x_t. Doanh thu từ bán hàng chịu thuế với thuế suất τ_t. Tại thời gian t, τ_t và z_t đã biết – ở đây z_t là một biến quan hệ với τ_{t+1} qua hàm $\tau_{t+1} = g(z_t, \varepsilon_{t+1})$, với ε_{t+1} là một biến ngẫu nhiên có phân phối độc lập và đồng nhất, không quan sát được tại t nhưng phân phối của nó được công ty biết. Lưu ý rằng, khi đã cho z_t, hàm g cảm sinh một phân phối có điều kiện của τ_{t+1} mà ta ký hiệu là $F(\tau_{t+1}, z_t)$. Quá trình ngẫu nhiên $\{z_t\}$ là quá trình Markov với hàm chuyển $H(z',z) \equiv p\{z_{t+1} \le z' \mid z_t = z\}$ (1.62). Lượng vốn hiện vật giảm giá với tốc độ τ. Bài toán của công ty là:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (1 - \tau_t) q_t, \quad 0 < \beta < 1 \tag{1.63}$$

Với ràng buộc $q_t + x_t \le f(k_t)$ (1.64)

$$k_{t+1} \le (1 - \delta)k_t + x_t, \ k_0 \text{ cho trước}, 0 < \delta < 1 \tag{1.65}$$

Giả sử rằng f(k) tăng, lõm và bị chặn.

7.2. Mô hình tối ưu động của độc quyền

Ta sẽ xem xét mô hình cổ điển của Evans về một công ty độc quyền, một trong những ứng dụng sớm nhất của phép tính biến phân vào kinh tế học.

7.2.1. Hàm lợi nhuận động

Xét một công ty độc quyền sản xuất một sản phẩm đơn nhất với hàm tổng chi phí có dạng bậc hai:

$$C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0) \tag{1.66}$$

Vì không xét đến tồn kho, đầu ra (sản lượng) Q luôn luôn được gán bằng lượng cầu. Vì vậy, ta sẽ sử dụng một ký hiệu Q(t) để ký hiệu cả lượng

cung và cầu. Lượng cầu được giả định là không chỉ phụ thuộc vào giá P(t) mà còn vào tốc độ thay đổi giá P'(t):

$$Q = a - bP(t) + hP'(t) \quad (a, b > 0; \quad h \neq 0) \tag{1.67}$$

Như vậy, lợi nhuận của công ty là:

$$\pi = PQ - C$$

$$= P(a - bP + hP') - \alpha (a - bP + hP')^2 - \beta (a - bP + bP') - \gamma \tag{1.68}$$

Đó là một hàm của P và P'. Khai triển biểu thức trên và nhóm các số hạng, ta có hàm lợi nhuận động:

$$\begin{aligned}\pi(P, P') &= -b(1 + \alpha b)P^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)P \\ &\quad - \alpha h^2 P'^2 - h(2\alpha a + \beta)P' + h(1 + 2\alpha b)PP' \\ &\quad - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma) \quad \text{(hàm lợi nhuận)}\end{aligned} \tag{1.69}$$

7.2.2. Mô hình

Mục tiêu của công ty là tìm quỹ đạo tối ưu của giá P làm cực đại tổng lợi nhuận Π trên một thời kỳ hữu hạn [0,T]. Thời kỳ này được giả định là đủ ngắn để lý giải cho giả thiết về các hàm cầu và chi phí cố định, cũng như sự vắng mặt nhân tố chiết khấu. Ngoài ra, như cách tiếp cận thứ nhất đối với bài toán, cả giá ban đầu P_0 và giá cuối P_T được giả định là đã cho.

Do đó mục tiêu của công ty độc quyền là:

$$\text{Cực đại} \qquad \Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P')\,dt \tag{1.70}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad P(0) = P_0 \ (P_0 \text{ cho trước}) \tag{1.71}$$

$$\text{và} \qquad P(T) = P_T \ (T, P_T \text{ cho trước}) \tag{1.72}$$

VIII. MÔ HÌNH LỰA CHỌN GIỮA LẠM PHÁT VÀ THẤT NGHIỆP

Chứng bệnh kinh tế của cả lạm phát lẫn thất nghiệp đều gây ra những tổn thất xã hội. Khi tồn tại một sự lựa chọn Phillips giữa hai chứng bệnh này, tổ hợp tốt nhất của lạm phát và thất nghiệp theo thời gian là gì? Có thể tìm câu trả lời cho câu hỏi này không. Trong mục này, ta trình bày một sự biểu diễn đơn giản của bài toán như vậy. Trong biểu diễn này, biến thất nghiệp không được đưa vào; để thay thế, nó được xấp xỉ bởi $(Y_f - Y)$ tức

là sự thiếu hụt của thu nhập quốc dân hiện thời Y so với mức toàn dụng nhân công Y_f của nó.

8.1. Hàm tổn thất xã hội

Giả sử nền kinh tế ở tình trạng lý tưởng bao gồm mức thu nhập Y_f gắn liền với mức lạm phát 0. Bất cứ sự chệch nào, dương hoặc âm, của thu nhập thực Y khỏi Y_f đều coi là không mong muốn, và bất cứ sự lệch nào của tốc độ lạm phát thực p khỏi mức 0 cũng thế. Khi đó ta có thể viết hàm tổn thất xã hội như sau:

$$\lambda = (Y_f - Y)^2 + \alpha p^2 \quad (\alpha > 0) \tag{1.73}$$

Tuy nhiên, các độ lệch Y và các độ lệch p tham gia vào hàm tổn thất với các trọng số khác nhau, theo tỷ lệ $1/\alpha$, phản ánh mức độ không thích khác nhau đối với hai loại độ lệch này.

Sự lựa chọn Phillips, được bổ sung thêm các kỳ vọng, giữa $(Y_f - Y)$ và p được cho trong phương trình:

$$p = -\beta(Y_f - Y) + \pi \qquad (\beta > 0) \tag{1.74}$$

ở đây π là tốc độ lạm phát *kỳ vọng*. Sự tạo thành các kỳ vọng lạm phát được giả định tuân theo luật sau:

$$\pi'\left(\equiv \frac{d\pi}{dt}\right) = j(p - \pi) \quad (0 < j \le 1) \tag{1.75}$$

Nếu tốc độ lạm phát thực p vượt quá tốc độ lạm phát kỳ vọng π (chứng tỏ π là một ước lượng thiếu), thì $\pi' > 0$, và π sẽ được điều chỉnh lên; Ngược lại, tốc độ lạm phát thực p rơi xuống thấp hơn tốc độ kỳ vọng π, thì $\pi' < 0$ và π được điều chỉnh xuống.

Hai phương trình cuối cùng hợp lại cho ta:

$$\pi' = -\beta j(Y_f - Y) \tag{1.76}$$

Có thể sắp xếp (1.76) lại thành:

$$Y_f - Y = \frac{-\pi'}{\beta j} \tag{1.77}$$

Từ (1.75) ta có:

$$p = \frac{\pi'}{j} + \pi \tag{1.78}$$

Từ đó ta có thể biểu thị hàm tổn thất hoàn toàn theo π và π' như sau:

$$\lambda(\pi, \pi') = \left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2 \quad \text{(hàm tổn thất)} \tag{1.79}$$

8.2. Mô hình

Bài toán đặt ra đối với chính phủ là tìm quỹ đạo (đường đi) tối ưu của π làm cực tiểu tổng tổn thất xã hội trên khoảng thời gian [0,T]. Giá trị hiện thời của π được cho tại π_0, và giá trị cuối của π, một mục tiêu chính sách, được giả định là bằng 0. Thừa nhận tầm quan trọng của hiện thời so với tương lai, tất cả các tổn thất được chiết khấu về giá trị hiện tại của nó qua hệ số chiết khấu ρ dương.

Khi đó, mục tiêu của nhà hoạch định chính sách là giải bài toán sau:

$$\text{Cực tiểu} \qquad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t}\, dt \tag{1.80}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \pi(0) = \pi_0 \quad (\pi_0 > 0 \text{ cho trước}) \tag{1.81}$$

$$\text{và} \qquad \pi(T) = 0 \quad (\text{T cho trước}) \tag{1.82}$$

IX . VẤN ĐỀ MÔI TRƯỜNG

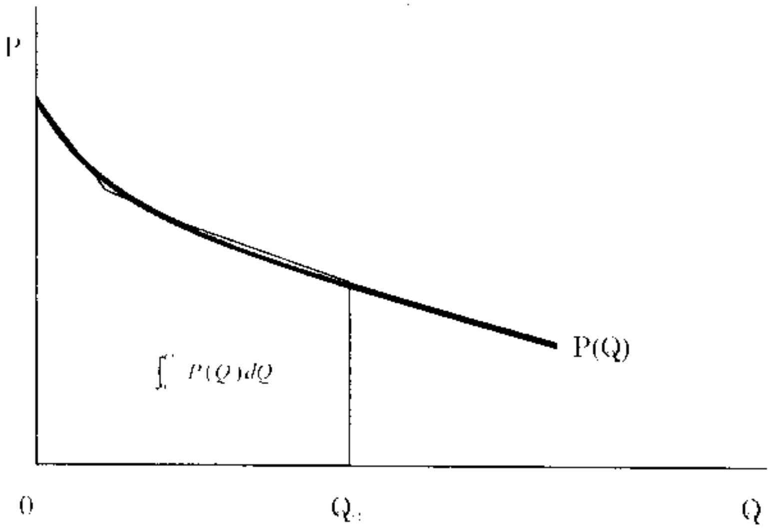
9.1. Kinh tế học về các tài nguyên có thể cạn kiệt

Khi bàn về các hàm sản xuất, các đầu vào thường không được xem là có thể cạn kiệt. Trên thực tế, một số tài nguyên nhất định - như dầu và khoáng sản lại không phải như thế. Khi sử dụng một tài nguyên như vậy, nếu không khám phá ra những mỏ mới hoặc các nguồn thay thế, cần phải tính đến khả năng cạn kiệt. Việc làm thế nào để khai thác tài nguyên một cách tốt nhất qua thời gian là một vấn đề có tính xã hội quan trọng.

9.2. Mô hình Hotelling về khai thác tối ưu trên giác độ xã hội

Harold Hotelling đã nêu ra khái niệm "giá trị xã hội" của một tài nguyên có thể cạn kiệt được sử dụng để đánh giá một chương trình khai thác nó. Nếu giá P của tài nguyên là quan hệ ngược với lượng cầu, như minh hoạ trong Hình 1.6 thì *tổng* giá trị xã hội của một đầu ra Q_0 được đo

bởi diện tích miền tô đậm dưới đường cong, hay tích phân $\int_0^{Q_0} P(Q)dQ$. Ở đây P(Q) là đơn giá mà xã hội sẵn sàng trả cho một đơn vị tài nguyên khi lượng cầu của nó là Q.



Hình 1.6

Để tìm giá trị xã hội *ròng*, ta trừ tổng giá trị xã hội cho chi phí khai thác C(Q). Cho mức sản lượng Q bất kỳ, giá trị xã hội ròng của nó là:

$$N(Q) = \int_0^Q P(Q)dQ - C(Q) \tag{1.83}$$

Giả sử rằng tổng dự trữ tài nguyên có thể cạn kiệt đó là S_0, ta có bài toán tìm quá trình khai thác Q(t) để

Cực đại $$V = \int_0^\infty N(Q)e^{-\rho t}dt \tag{1.84}$$

với ràng buộc $$\int_0^\infty Qdt = S_0. \tag{1.85}$$

Rõ ràng, đây là một bài toán đẳng chu. Bởi vì giả thiết hàm giá trị xã hội ròng bị chặn trên là có lý, nên tích phân suy rộng trong phiếm hàm mục tiêu phải hội tụ.

9.3. Mô hình cho chính sách chống ô nhiễm

Trong mô hình Forster về sử dụng năng lượng và chất lượng môi trường, ô nhiễm được lấy là một *biến luồng*. Biến này được minh hoạ bằng

thí dụ khí thải ô tô, mà nó gây hại cho môi trường vào lúc hiện thời, nhưng tan biến nhanh và không tích luỹ thành một trữ lượng tồn tại lâu dài. Trong khi đó các loại ô nhiễm khác, như chất thải phóng xạ và làm đổ dầu lửa, các chất gây ô nhiễm tồn tại như một trữ lượng và sản sinh những ảnh hưởng kéo dài. Việc mô hình hoá ô nhiễm như một *biến kho* cũng được Forster xem xét. Mô hình này chứa hai biến trạng thái và hai biến điều khiển.

9.3.1. Lượng ô nhiễm

Ta sử dụng ký hiệu E để biểu thị lượng khai thác nhiên liệu và sử dụng năng lượng. Nhưng P sẽ ký hiệu trữ lượng (chứ không phải luồng) ô nhiễm, với $\dot{P}$ là luồng. Việc sử dụng năng lượng sinh ra một luồng ô nhiễm. Nếu khối lượng của luồng ô nhiễm tỷ lệ thuận với lượng năng lượng sử dụng, thì ta có thể viết $\dot{P} = \alpha E$, $(\alpha > 0)$. Cho A tượng trưng cho mức hoạt động chống ô nhiễm, và giả sử rằng A có thể làm giảm trữ lượng ô nhiễm theo tỷ lệ. Khi đó, ta có $\dot{P} = -\beta A$, $(\beta > 0)$. Thêm nữa, nếu trữ lượng ô nhiễm chịu sự giảm theo hàm mũ với tốc độ $\delta > 0$, thì ta có $\dot{P}/P = -\delta$, do đó $\dot{P} = -\delta P$. Kết hợp các nhân tố ảnh hưởng lên P, ta có thể viết

$$\dot{P} = \alpha E - \beta A - \delta P \qquad (\alpha, \beta > 0, 0 < \delta < 1) \tag{1.86}$$

9.3.2. Trữ lượng nguồn năng lượng

Việc triển khai các hoạt động chống ô nhiễm A bản thân nó đòi hỏi sử dụng năng lượng. Nghĩa là A gây nên một lượng giảm, trữ lượng S nguồn năng lượng. Khi giả định một quan hệ tỷ lệ giữa A và, bằng cách chọn đơn vị thích hợp cho A, và vì S cũng giảm do sử dụng năng lượng trong các hoạt động kinh tế khác, chúng ta cũng sẽ có thể kết hợp các xem xét này để đi đến điều kiện

$$\dot{S} = -A - E \tag{1.87}$$

9.3.3. Bài toán điều khiển

Vì các quan hệ trong (1.86) và (1.87) tương ứng mô tả những thay đổi động của P và S, các phương trình này rõ ràng có thể dùng như các phương trình chuyển động trong mô hình này. Khi đó, mô hình này coi P (trữ lượng ô nhiễm) và S (trữ lượng nhiên liệu) như các biến trạng thái. (1.86) và (1.87) cũng cho thấy rằng E (sử dụng năng lượng) và A (các hoạt động chống ô

nhiễm) phải đóng vai trò các biến điều khiển trong phân tích hiện tại.

Hàm lợi ích là:

$U = U[C(E), P] \quad (U_C > 0,\ U_P < 0,\ U_{CC} < 0,\ U_{PP} < 0,\ C' > 0,\ C'' < 0)$ (1.88)

thì bài toán tối ưu động có thể phát biểu là

Cực đại $\int_0^T U[C(E), P]\, dt$ (1.89).

Với ràng buộc $\dot{P} = \alpha E - \beta A - \delta P$ (1.90),

$\dot{S} = -A - E$ (1.91),

$P(0) = P_0 > 0 \quad P(T) \geq 0$ tự do (T cho trước) (1.92),

$S(0) = S_0 > 0 \quad S(T) \geq 0$ tự do (1.93),

và $E \quad 0 \leq A \leq \hat{A}$ (1.94).

Có hai khía cạnh của bài toán này đáng bình luận. Thứ nhất, trong khi các giá trị đầu của P và S là cố định và thời gian cuối T cũng cố định, các giá trị cuối của cả trữ lượng ô nhiễm P lẫn trữ lượng nguồn năng lượng S để tự do, chỉ chịu ràng buộc không âm. Điều đó có nghĩa là có một đường cuối thẳng đứng cụt đối với P và một đường cuối thẳng đứng cụt khác đối với S. Thứ hai, cả hai biến điều khiển E và A bị giới hạn trong các miền điều khiển tương ứng của chúng. Đối với E, miền điều khiển là $[0,\infty)$. Và đối với A, miền điều khiển là $[0, \hat{A}]$, ở đây $\hat{A}$ ký hiệu mức chấp nhận được cực đại của các hoạt động chống ô nhiễm. Vì những cân nhắc về ngân sách và các nhân tố khác có thể ngăn không cho theo đuổi việc làm sạch môi trường một cách không có giới hạn, giả thiết về một cận trên $\hat{A}$ không phải là không có lý và nó phù hợp với thực tế của mỗi nền kinh tế.

X. CÁC VẤN ĐỀ CHUNG

10.1. Mô hình cân bằng tổng quát động trong nền kinh tế phi tập trung với nhiễu thuế và lạm phát

10.1.1. Khu vực hộ gia đình

Chúng ta giả thiết các hộ gia đình có thể gộp thành một gia đình lớn (đơn vị phức hợp). Mục tiêu của đơn vị phức hợp này là chọn cầu tiêu dùng, cung lao động và lượng tiền ở đó hộ gia đình cực đại hàm lợi ích giữa các

thời kỳ:

$$\int_0^\infty U(c, l^s, m^d, g)e^{-\theta t}\,dt,\ U_c>0, \qquad U_l<0,\ U_g>0 \tag{1.95}$$

Với ràng buộc

$$c+\dot{b}_g^d+\dot{m}^d+\dot{b}_p^d+s\dot{E}^d = wl^s+r_g b_g^d+r_p b_p^d-p^*(b_g^d+b_p^d+m^d)+isE^d-T_h \tag{1.96}$$

Điều kiện đầu

$$B_g(0)=B_{g0},\ M(0)=M_0,\ B_p(0)=B_{p0},\ E(0)=E_0 \tag{1.97}$$

trong đó c là kế hoạch tiêu dùng thực của hộ gia đình,

l^s là cung lao động dự kiến của hộ gia đình.

$m^d = M^d/p$ là cầu cân đối tiền danh nghĩa.

M là lượng tiền danh nghĩa,

P là giá danh nghĩa của đầu ra,

g là chi tiêu thực của chính phủ, được coi là ngoại sinh,

b_g^d là cầu thực trái phiếu của chính phủ,

B_g là lượng trái phiếu danh nghĩa của chính phủ,

b_p^d là cầu thực của trái phiếu của công ty,

B_p là lượng trái phiếu danh nghĩa của công ty,

E là số các cổ phần chưa trả,

s là giá tương đối của cổ phiếu thường theo đầu ra hiện thời,

i = D/sE = suất thu lợi cổ tức,

D là cổ tức thực, cổ phần thực,

sE^d là cầu thực cổ phiếu thường,

w là tiền lương thực,

r_g là tỷ lệ lợi tức danh nghĩa trên trái phiếu chính phủ,

r_p là tỷ lệ lợi tức danh nghĩa trên trái phiếu công ty,

p* là tỷ lệ lạm phát nhất thời dự đoán được,

T_h là thuế thu nhập trên đầu người

β là hệ số chiết khấu theo thời gian.

10.1.2. Khu vực công ty

Lưu ý rằng khu vực công ty "được rút" ra bởi các hộ gia đình theo nghĩa là quyết định tối ưu của các hộ gia đình xác định chi phí thích hợp của vốn của các công ty.

Như vậy trước khi bài toán tối ưu của công ty có thể thành lập dưới dạng hiển và giải, cần phải giải bài toán tố ưu cho hộ gia đình.

Các ràng buộc đối với công ty có thể tóm tất như sau:

$$y^s=F(k^d,l^d) \qquad (1.98),$$

$$\Pi=y^s-wl^d \qquad (1.99),$$

$$\Pi=r_b b_p^s + D + RE + T_f \qquad (1.100),$$

$$\dot{k}^d=RE+s\dot{E}^s+\dot{b}_p^s+p^*b^s_p \qquad (1.101),$$

$$k(0)=k_0,\ E(0)=E_0,\ B_p(0)=B_0 \qquad (1.102),$$

trong đó:

l^d là cầu thực về lao động của công ty,

k^d là cầu thực cho vốn hiện vật của công ty,

y^s là cung đầu ra thực,

Π là tổng lợi nhuận thực,

b_p^s là cung thực của trái phiếu của công ty,

E^s là số cổ phiếu thường được công ty phát hành,

RE là lợi nhuận giữ lại,.

T_f là thuế lợi nhuận (prafit tax) của công ty.

Phương trình (1.98) miêu tả hàm sản xuất tân cổ điển. Phương trình (1.99) cho định nghĩa tổng lợi nhuận theo số hạng thực. Phương trình (1.100)- miêu tả phân phối tổng lợi nhuận. Sau khi trả thuế thu nhập công ty, nó có thể sử dụng để trả lợi tức cho người giữ trái phiếu công ty, được sử dụng để trả lợi tức cổ phần hoặc làm lợi nhuận giữ lại cho công ty. Phương

trình (1.101) biểu thị ràng buộc tài chính của công ty.

$p^*b_p^s$ là doanh doanh thu trên trái phiếu tư nhân đối với hãng. Cuối cùng, phương trình (1.102) chỉ định điều kiện đầu trên lượng vốn, số các cổ phiếu do các cổ đông nắm giữ và lượng trái phiếu công ty.

Ta định nghĩa giá trị của chứng khoán của công ty do cổ đông nắm giữ ở thời điểm t là

$$V(t) = b_p(t) + s(t)E(t) \qquad (1.103).$$

Ta cũng giả thiết rằng mục tiêu của công ty là cực đại giá thị trường thực ban đầu của chứng khoán V(0) với ràng buộc (1.98)-(1.102) và các điều kiện tối ưu cho các hộ gia đình.

10.1.3. Khu vực chính phủ

Giả sử Chính phủ cung cấp hàng hoá và dịch vụ thực g từ ngân sách là thuế thực nhận được hoặc phát hành một số trái phiếu. Ràng buộc ngân sách được miêu tả theo số hạng thực như sau:

$$\dot{m}^s + \dot{b}_g^s = g + r_g b_g^s - T_h - T_f - (m^s - b_g^s)p^* \qquad (1.104),$$

trong đó s là cung có kế hoạch của chính phủ. Phương trình trên định nghĩa thiếu hụt thực ròng mà được tài trợ hoặc bởi tăng trong cung tiền hoặc bởi tăng trong khối lượng trái phiếu thực tế của chính phủ.

Sự lựa chọn giữa 2 khả năng này hoặc các khả năng khác biểu thị quyết định chính sách mà ta phải chỉ định để đóng mô hình.

Cuối cùng chúng ta chỉ định hàm thuế T_h, T_f như sau:

$$T_h = \tau_y(wl^s + r_g b_g^d + r_p b_g^d + isE^d) + \tau_c(\dot{s} + sp^*)E \qquad (1.105)$$

$$T_f = \tau_p(y^s - wl^d - r_p b_p^s) \qquad 0 \le \tau_y \le 1;\ 0 \le \tau_c \le 1;\ 0 \le \tau_p \le 1 \qquad (1.106)$$

trong đó, tất cả các cấu trúc thuế được giả định là tuyến tính. Theo (1.105) thu nhập trên đầu người từ lương, lợi tức trái phiếu (trái tức) và cổ tức được đánh thuế ở cùng tỷ lệ τ_y. Vốn danh nghĩa thu được trên cổ phiếu thường được giả định là được đánh thuế ở tỷ lệ τ_c mà nói chung không bằng τ_y. Trong hầu hết các nền kinh tế $\tau_c < \tau_y$, và dĩ nhiên, nhiều khi $\tau_c = 0$.

Quay lại thuế thu nhập công ty, tổng lợi nhuận được giả định được đánh thuế ở tỷ lệ τ_p.

10.2. Mô hình với công nghệ không lồi - Mô hình lao động không thể phân chia được và chu kỳ kinh doanh (Hansen, G.D)

Trong mô hình này ta xét hai nền kinh tế:

10.2.1. Mô hình tăng trưởng ngẫu nhiên một khu vực với lao động có thể phân chia

Nền kinh tế đang nghiên cứu được giả thiết gồm vô số công dân thuộc khoảng [0,1], có tuổi thọ vô hạn. Mô hình có một hãng với công nghệ sản xuất được biểu thị bằng hàm sản xuất dạng Cobb-Douglass

$$f(\lambda_t,k_t,h_t)=\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} \quad (1.107)$$

trong đó:

h là lao động,

k_t làvốn tích luỹ,

λ_t là sốc ngẫu nhiên mà tuân theo quá trình ngẫu nhiên sẽ được mô tả ở dưới.

Các công dân được giả thiết là quan sát λ_t trước khi ra quyết định ở thời kỳ t.

Giả thiết về công ty được đưa ra sao cho đơn giản. Công nghệ biểu thị hiệu quả không đổi theo quy mô.

Sản lượng của công ty sản xuất được đem bán cho hộ gia đình để tiêu dùng

(c_t) hoặc đầu tư (i_t), sao cho các ràng buộc sau đây phải được thoả mãn:

$$c_t+i_t\le f(\lambda_t,k_t,h_t) \quad (1.108),$$

Luật chuyển động của vốn được cho bởi

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+i_t \ , \ 0\le\delta\le1 \quad (1.109),$$

trong đó δ là tỷ lệ khấu hao vốn. Khối lượng vốn do hộ gia đình sở hữu và chuyển cho công ty sử dụng.

Sốc công nghệ được giả định là tuân theo quá trình Markov bậc nhất, đặc biệt λ tuân theo luật sau:

$$\lambda_{t+1}=\gamma\lambda_t+\varepsilon_{t+1} \quad (1.110),$$

trong đó ε_t là các biến ngẫu nhiên độc lập đồng nhất với hàm phân phối xác suất là F và với một số đòi hỏi nhất định như trung bình là λ, trung bình không điều kiện của λ là 1.

Hộ gia đình trong nền kinh tế này muốn cực đại giá trị kỳ vọng

$$\max \sum_{t=0}^{\prime} \beta^t U(c_t, l_t), \ \beta \in (0,1) \qquad (1.111).$$

β là thừa số chiết khấu, c_t và l_t là tiêu dùng và nghỉ ngơi tương ứng trong thời kỳ t. Đầu vào sẵn có được chuẩn hoá bằng 1 do đó $l_t = 1 - h_t$. Lợi ích ở thời kỳ t được cho bởi hàm:

$$U(c_t, l_t) = \log c_t + A \log l_t \qquad A > 0 \qquad (1.112).$$

Chúng ta đã có chỉ định đầy đủ sự ưa thích, công nghệ, cấu trúc ngẫu nhiên của nền kinh tế đơn giản.

Trong nền kinh tế này, mỗi thời kỳ có 3 hàng hoá được trao đổi: hàng hoá phức hợp đầu ra; lao động, dịch vụ và vốn mà có thể xem chỉ có dãy các thị trường giao ngay. Các hộ gia đình giải bài toán sau

$$\max E \sum_{t=0}^{\prime} \beta^t U(c_t, 1 - h_t) \qquad (1.113).$$

với ràng buộc

$$c_t + i_t \le w_t h_t + r_t k_t \qquad (1.114).$$

cho trước k_0 và λ_0.

Các hộ gia đình được giả thiết đưa ra quyết định ở thời kỳ t dựa trên tất cả các thông tin có thể có ở thời kỳ đó. Chúng ta cũng giả thiết kỳ vọng là hợp lý. Vì giả thiết không có ảnh hưởng bên ngoài nên tối ưu Pareto cũng là cân bằng cạnh tranh trong nền kinh tế này. Vì các hộ gia đình được giả thiết là thuần nhất nên tối ưu Pareto có trọng số bằng nhau là lời giải đối với bài toán cực đại phúc lợi xã hội của người đại diện với ràng buộc công nghệ. Bài toán này là như sau:

$$\max E \sum_{t=0}^{\prime} \beta^t U(c_t, 1 - h_t) \qquad (1.115).$$

Với ràng buộc 1.114 và các nhiễu ngẫu nhiên độc lập đồng nhất. Trạng thái của nền kinh tế ở thời kỳ t được miêu tả bởi k_t và λ_t. Biến quyết định là h_t, c_t và i_t, cho trước k_0 và λ_0, bài toán này được giải bằng kỹ thuật quy hoạch động.

10.2.2. Nền kinh tế với lao động không phân chia được

Bây giờ ta giả thiết lao động không phân chia được và bổ sung giả thiết này vào mô hình trên. Lao động không thể phân chia được, được mô hình hoá bằng ràng buộc của tập khả năng tiêu dùng sao cho mỗi người hoặc làm việc hết thời gian, ký hiệu h_0, hoặc không phải làm việc hết thời gian. Điều này dẫn đến tập khả năng tiêu dùng không lồi, Hansen đã sử một dụng phương pháp mà ông gọi là "lottery" để biến bài toán với công nghệ không lồi thành công nghệ lồi sao cho có thể áp dụng phương pháp của quy hoạch động.

XI. TIẾN BỘ CÔNG NGHỆ NGOẠI SINH VÀ NỘI SINH

Mô hình tăng trưởng tối ưu tân cổ điển đã thảo luận cho một trạng thái ổn định mà trong đó tiêu dùng trên đầu người, c, giữ không đổi ở mức $\bar{c}$, không để lại hy vọng nào về sự cải thiện thêm trong mức sống trung bình. Nguyên nhân dẫn đến việc ấn định cứng mức tiêu dùng đầu người là bản chất tĩnh của hàm sản xuất Y = Y(K,L), trong đó K là vốn, L là lao động, còn Y là đầu ra (sản lượng) được sản xuất. Vì cùng một công nghệ sản xuất được giữ nguyên với mọi t, không có sự dịch chuyển theo thời gian nào lên phía trên có thể xảy ra. Tuy nhiên, khi cho phép có tiến bộ về công nghệ, ta có thể dễ dàng gỡ bỏ giới hạn tiêu dùng trên đầu người.

11.1. Các hàm sản xuất động

Dưới dạng tổng quát hàm sản xuất động, có thể viết

$$Y = Y(K,L,t) \qquad (Y_t > 0) \qquad (1.116)$$

Dấu dương của Y_t chỉ ra rằng có xảy ra tiến bộ về công nghệ, nhưng nó không đưa ra một giải thích nào về tiến bộ đó diễn ra thế nào. Như vậy, biểu diễn này có thể được dùng chỉ đối với tiến bộ công nghệ ngoại sinh. Một cách khác để viết một hàm sản xuất động là đưa vào hàm sản xuất sau:

$$Y = Y(K,L,A) \quad (Y_A > 0) \qquad (1.117)$$

trong đó $A = A(t)$ biểu thị trạng thái kỹ xảo, với $dA/dt > 0$.

Ưu điểm của (1.117) so với (1.116) là ở chỗ, với một biến A dưới dạng biến, bây giờ ta có thể hoặc để A như một biến ngoại sinh hoặc làm cho nó trở thành nội sinh bằng cách quy định A được xác định trong mô hình như thế nào.

11.2. Tiến bộ công nghệ ngoại sinh trung tính

Tiến bộ kỹ thuật được gọi là "trung tính" khi nó để cho một biến kinh tế nào đó không bị ảnh hưởng trong một hoàn cảnh sẽ được quy định. Nói riêng, tiến bộ công nghệ là *trung tính kiểu Hicks* nếu nó để cho tỷ lệ thay thế kỹ thuật biên ($MRTS = MPP_L/MPP_K$) không thay đổi tại cùng một tỷ lệ K/L. Nghĩa là, nếu giữ cho K/L không đổi và xem xét MRTS trước và sau tiến bộ công nghệ, thì hai MRTS trùng nhau. Để nắm bắt tính chất này, ta có thể sử dụng dạng đặc biệt sau đây của (1.117):

$$Y = A(t)\,Y(K,L) \qquad \text{[trung tính kiểu Hicks]} \qquad (1.118)$$

ở đây Y(K,L) là thuần nhất tuyến tính. Lý do để biến A không ảnh hưởng đến tỷ lệ của các sản phẩm biên của K và L là nó nằm ngoài biểu thức Y(K,L).

Trái lại, tiến bộ công nghệ là *trung tính kiểu Harrod* nếu nó để cho tỷ lệ đầu ra -vốn (Y/K) không thay đổi tại cùng một MPP_K. Dạng đặc biệt của (1.117) thể hiện tính chất này là

$$Y = Y[K, A(t)L] \qquad \text{[trung tính kiểu Harrod]} \qquad (1.119),$$

Ở đây Y là tuyến tính thuần nhất theo K và A(t)L. Vì A(t) chỉ được gắn vào L. Khi xem xét cách mà A(t) và L kết hợp với nhau, ta có thể coi công nghệ và lao động là những cái hoàn toàn thay thế được cho nhau trong quá trình sản xuất. Chính việc A hoàn toàn tách với biến K giải thích vì sao tỷ số Y/K không bị ảnh hưởng tại cùng một mức MPP_K khi tiến bộ công nghệ xảy ra.

Kiểu trung tính thứ ba, *trung tính kiểu Solow*, là ảnh phản chiếu của trung tính kiểu Harrod, với vai trò K và L thay đổi cho nhau. Khi đó hàm có thể được viết là

$$Y = Y\,[A(t)K, L] \qquad \text{[trung tính kiểu Solow]} \qquad (1.120)$$

ở đây, Y là thuần nhất tuyến tính theo AK và L.

11.3. Tăng trưởng tối ưu tân cổ điển với tiến bộ công nghệ trung tính kiểu Harrod

Trong các mô hình tăng trưởng với tiến bộ công nghệ ngoại sinh, thường giả định kiểu trung tính Harrod. Lý do chính cho sự phổ thông của

kiểu trung tính Harrod là nó phù hợp một cách hoàn hảo với khái niệm trạng thái ổn định; nó có thể mang lại một cân bằng động trong đó Y và K có thể tăng ăn nhịp với nhau. Thêm nữa, tiến bộ công nghệ kiểu Harrod không dẫn đến một sự phức tạp thêm nào khi phân tích so với trường hợp sử dụng hàm sản xuất tĩnh.

Ta hãy định nghĩa lao động hiệu quả, η, là

$$\eta = AL \tag{1.121}$$

Khi đó hàm sản xuất (1.119) trở thành

$$Y = Y(K,\eta) \tag{1.122}$$

Giả sử ta coi lao động hiệu quả η (chứ không phải lao động tự nhiên L) như là biến đầu vào lao động liên quan thì (1.122) có thể được xử lý toán học đúng như một hàm sản xuất tĩnh, mặc dù gốc gác của nó – (1.119) – về bản chất thực sự là động. Với giả thiết thuần nhất tuyến tính, ta có thể viết lại (1.122) như sau:

$$y_\eta = \phi(k_\eta)$$

ở đây $$y_\eta = \frac{Y}{\eta} \quad \text{và} \quad k_\eta = \frac{K}{\eta} \tag{1.122}$$

Phương trình chuyển động đối với k_η, biến trạng thái mới, ta có

$$\dot{k}_\eta = \phi(k_\eta) - c_\eta - (a + n + \delta)k_\eta \tag{1.123}$$,

ở đây $c_\eta \equiv \dfrac{C}{\eta}$, $\quad a \equiv \dfrac{\dot{A}}{A}$, $\quad$ và $n \equiv \dfrac{\dot{L}}{L}$.

Do đó, bài toán điều khiển tối ưu là

Cực đại $$\int_0^\infty U(c_\eta)e^{-rt}\,dt \tag{1.124}$$

Với ràng buộc $$\dot{k}_\eta = \phi(k_\eta) - c_\eta - (a + n + \delta)k_\eta \tag{1.125}$$

$$k_\eta(0) = k_{\eta 0} \tag{1.126}$$

và $$0 \le c_\eta \le \phi[k_\eta] \tag{1.127}$$

11.4. Tiến bộ công nghệ nội sinh

Tiến bộ công nghệ ngoại sinh có giá trị lớn do tính đơn giản, tuy nhiên nó không giải thích căn nguyên của tiến bộ công nghệ. Để khắc phục nhược

điểm này, cần nội sinh hoá tiến bộ công nghệ. Vào những năm 1960, các nhà kinh tế đã nghiên cứu lý luận của sự tạo thành kiến thức. Thí dụ, mô hình "học thông qua làm" nổi tiếng của Kenneth Arrow coi tổng đầu tư như thước đo của khối lượng "làm", mà nó mang lại kết quả "học" (tiến bộ công nghệ). Một thí dụ khác, một mô hình của Karl Shell, mà bây giờ ta sẽ thảo luận vắn tắt, cho tích luỹ kiến thức phụ thuộc một cách hiển vào lượng nguồn lực dành cho hoạt động sáng chế.

Hàm sản xuất trong mô hình Shell,

$$Y(t) = Y[K(t), L(t), A(t)] \tag{1.128}$$

giống như (1.117), nhưng bây giờ biến A(t) (ký hiệu lượng kiến thức tích luỹ), là mẫu thay đổi cụ thể đã cho

$$\dot{A}(t) = \sigma\alpha(t)Y(t) - \beta A(t) \qquad (0 < \sigma < 1,\ 0 \le \alpha \le 1, \beta \ge 0) \tag{1.129}$$

trong đó σ là hệ số thành công trong nghiên cứu, α(t) ký hiệu tỷ lệ đầu ra đưa vào hoạt động sáng chế tại thời gian t, và β là tốc độ mai một của kiến thức kỹ thuật. Trong những nguồn lực còn lại, một phần sẽ được tiết kiệm (và được đầu tư). Như vậy, biến K(t) thay đổi qua thời gian theo

$$\dot{K}(t) = s(t)[1 - \alpha(t)]Y(t) - \delta K(t) \tag{1.130}$$

trong đó s ký hiệu khuynh hướng tiết kiệm và δ ký hiệu tỷ lệ hao mòn. Để tập trung chú ý vào tích luỹ kiến thức và vốn, ta giả định rằng L là hằng số, và (bằng cách chọn đơn vị) đặt nó bằng 1.

Trong nền kinh tế phi tập trung hoá, động lực học tích luỹ có thể tìm được từ hệ phương trình (1.129) và (1.130) của hai biến A và K. Mặt khác, nếu chính quyền muốn cực đại lợi ích xã hội thì nảy sinh bài toán điều khiển tối ưu

Cực đại $\int_0^{\infty} U[(1-s)(1-\alpha)Y]e^{-\rho t}\,dt$ (1.131),

Với ràng buộc $\dot{A} = \sigma\alpha Y(K, A) - \beta A$ (1.132),

$\dot{K} = s(1-\alpha)Y(K, A) - \delta K$ (1.133),

và $A(0) = A_0 \qquad K(0) = K_0$ (1.134).

Hàm lấy tích phân trong phiếm hàm mục tiêu có thể trông không quen, nhưng nó chỉ là một cách khác để biểu thị $U(C)e^{-\rho t}$, bởi vì C là phần còn lại của Y sau khi trừ đi phần đưa vào hoạt động sáng chế và tích luỹ vốn:

$$C = Y - \alpha Y - s(1 - \alpha) Y = (1 - s)(1 - \alpha) Y \qquad (1.135),$$

Bài toán này chứa hai biến trạng thái A và K và hai biến điều khiển α và s.

CHƯƠNG II

PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ

A. BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN

Chúng ta sẽ bắt đầu nghiên cứu phép tính biến phân với bài toán cơ bản:

Cực đại hay cực tiểu $V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]dt$ (2.1)

với ràng buộc $y(0) = A$ (A cho trước) (2.2)

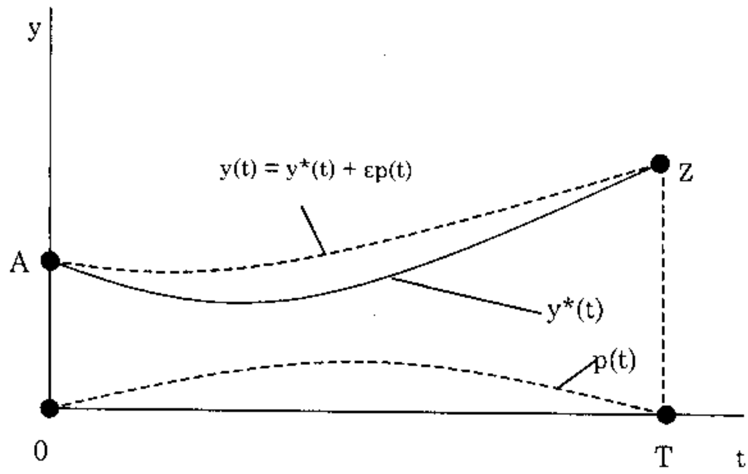
và $y(T) = Z$ (T, Z cho trước) (2.3)

trong đó $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$.

Các bài toán cực đại và cực tiểu khác nhau ở các điều kiện cấp hai, nhưng chúng có chung điều kiện cấp một.

Nhiệm vụ của phép tính biến phân là từ một tập hợp các đường đi (hay *quỹ đạo*) chấp nhận được y, chọn một đường đi mang lại cực trị cho V[y]. Vì phép tính biến phân dựa trên các phương pháp cổ điển sử dụng các đạo hàm cấp một và cấp hai, ta sẽ giới hạn tập hợp các đường đi chấp nhận được trong các đường liên tục với các đạo hàm liên tục. Một đường đi y trơn mang lại cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) của V[y] được gọi là đường cực trị hoặc quỹ đạo cực trị. Chúng ta cũng sẽ giả định rằng hàm dưới dấu tích phân F là khả vi hai lần.

Cực trị của V[y] có thể là tuyệt đối (toàn cục) hoặc tương đối (địa phương). Phép tính biến phân dựa trên phương pháp cổ điển, có thể giải trực tiếp chỉ với đường cực trị tương đối, nghĩa là nó chỉ đóng vai trò cực trị so với các đường đi y ngay "ở lân cận" của nó.



Hình 2.1

I. PHƯƠNG TRÌNH EULER

Điều kiện cần cấp một cơ bản trong phép tính biến phân là *phương trình Euler*. Phương trình này được phát hiện ra từ năm 1744, đến nay nó vẫn còn là kết quả quan trọng nhất trong ngành toán học. Trên Hình 2.1, cho đường đi liền nét $y^*(t)$ là một đường cực trị đã biết. Ta hãy tìm tính chất của nó mà các đường lân cận (không cực trị) không có. Tính chất như vậy sẽ là một điều kiện cần đối với đường cực trị. Để làm việc đó, ta cần một họ các đường đi lân cận để so sánh, mà theo chỉ định trong (2.1)-(2.3), phải đi qua các điểm mút (0,A) và (T,Z) đã cho. Một cách đơn giản để sản sinh ra họ đường đi lân cận như vậy là sử dụng một đường cong $p(t)$ gọi là đường xao động, được chọn tuỳ ý với điều kiện là nó trơn và đi qua các điểm 0 và T trên trục hoành trong Hình 2.1, để cho:

$$p(0) = p(T) = 0 \tag{2.4}$$

Ta chọn để minh hoạ một đường cong với các giá trị p tương đối nhỏ và các độ dốc nhỏ. Bằng cách thêm $\varepsilon p(t)$ vào $y^*(t)$, ở đây ε là một số nhỏ, và thay đổi độ lớn của ε, ta có thể làm xao động đường đi $y^*(t)$, chuyển nó tới các vị trí lân cận khác nhau, bằng cách đó tạo ra các đường đi lân cận mong muốn. Các đường đi này có thể ký hiệu một cách tổng quát là:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon p(t) \text{ (kéo theo } y'(t) = y^{*\prime}(t) + \varepsilon p'(t)) \tag{2.5}$$

với tính chất là: khi $\varepsilon \to 0$, $y(t) \to y^*(t)$. Để tránh phức tạp, trong Hình 2.1 chỉ vẽ một trong các đường đi lân cận này.

Sự kiện cả $y^*(t)$ lẫn $p(t)$ là các đường cong đã cho có nghĩa là mỗi giá trị của ε sẽ xác định một quỹ đạo (đường đi) y ở lân cận, và một giá trị V[y]. Do đó, thay vì coi V là một *phiếm hàm* của đường đi y, bây giờ ta có thể coi nó như một hàm số của biến ε: $V(\varepsilon)$. Sự thay đổi trong cách nhìn này tạo điều kiện cho ta áp dụng các phương pháp tìm cực trị cổ điển quen thuộc đối với hàm $V = V(\varepsilon)$. Vì đường cong $y^*(t)$ tương ứng với $\varepsilon = 0$, ta phải có:

$$\left.\frac{dV}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{2.6}$$

Vậy $dV/d\varepsilon = 0$ là điều kiện cần đối với đường cực trị $y^*(t)$.

Tuy nhiên, điều kiện (2.6) không thuận tiện cho tính toán.

1.1. Phương pháp tìm phương trình Euler

Thủ tục tìm phương trình Euler trải qua một số bước sau:

Bước I. Biểu diễn V theo ε rồi lấy đạo hàm của nó. Thế y(t) trong (2.1) bằng $y^* + \varepsilon p$ ta có:

$$V(\varepsilon) = \int_0^T F\Big[t, \underbrace{y^*(t) + \varepsilon p(t)}_{y(t)}, \underbrace{y^{*\prime}(t) + \varepsilon p'(t)}_{y(t)}\Big]dt \tag{2.7}$$

Theo quy tắc Leibniz, lấy đạo hàm qua dấu tích phân ta được[2]:

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}dt = \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\varepsilon}\right)dt$$

$$= \int_0^T \left[F_y\, p(t) + F_{y'}\, p'(t)\right]dt \tag{2.8}$$

Tách tích phân cuối cùng thành hai tích phân riêng rẽ, và đặt $dV/d\varepsilon = 0$, ta thu được điều kiện cần đối với đường cực trị y^* như sau:

$$\int_0^T F_y p(t)\,dt + \int_0^T F_{y'} p'(t)\,dt = 0 \tag{2.9}$$

[2] Các phép tính đạo hàm, tích phân của tích phân phụ thuộc tham số xem phụ lục

Điều kiện cần này không còn biến tuỳ ý ε nhưng vẫn còn đường cong xao động p(t) và đạo hàm p'(t) của nó. Để làm cho điều kiện cần hoàn toàn tiện lợi, ta còn phải khử p(t) và p'(t).

Bước II. Lấy tích phân từng phần tích phân thứ hai trong (2.9), bằng cách sử dụng công thức:

$$\int_{t=a}^{t=b} v\,du = vu\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_{t=a}^{t=b} u\,du \tag{2.10}$$

Đặt $v \equiv F_{y'}$ và $u \equiv p(t)$, ta có:

$$dv \equiv \frac{dv}{dt}dt = \frac{dF_{y'}}{dt}dt \tag{2.11}$$

và

$$du \equiv \frac{du}{dt}dt = p'(t)\,dt \tag{2.12}$$

Thế các biểu thức này vào (2.10), với a = 0 và b = T ta được:

$$\int_0^T F_{y'}p'(t)\,dt = \Big[F_{y'}p(t)\Big]_0^T - \int_0^T p(t)\frac{d}{dt}F_{y'}\,dt = -\int_0^T p(t)\frac{d}{dt}F_{y'}dt \tag{2.13}$$

Bởi vì, theo giả thiết, số hạng thứ nhất ở vế phải dấu bằng thứ nhất phải bằng không. Thế (2.9) vào (2.13) ta đi đến:

$$\int_0^T p(t)\left[F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}\right]dt = 0 \tag{2.14}$$

Bước III. Mặc dù p'(t) không có mặt trong (2.14) nữa, nhưng p(t) tuỳ ý thì vẫn còn. Tuy nhiên, chính bởi vì p(t) là tuỳ ý, ta có thể kết luận rằng điều kiện (2.14) có thể thoả mãn chỉ nếu biểu thức trong ngoặc vuông $[F_y - dF_{y'}/dt]$ triệt tiêu với mọi giá trị của t trên cực trị; nếu không, tích phân này có thể không bằng 0 đối với một đường cong xao động p(t) chấp nhận được nào đó. Do đó, điều kiện cần đối với cực trị là:

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \quad \text{(phương trình Euler)}} \tag{2.15}$$

Lưu ý rằng phương trình Euler hoàn toàn không chứa các biểu thức tuỳ ý, và như vậy có thể áp dụng ngay khi cho hàm F(t,y,y') khả vi.

Phương trình Euler đôi khi cũng được biểu diễn dưới dạng:

$$\boxed{\int F_y\,dt = F_{y'}} \tag{2.16}$$

đó là kết quả của phép tích phân (2.15) theo t.

Bước IV. Có thể làm rõ hơn Bản chất của phương trình Euler (2.15) khi ta khai triển đạo hàm $dF_{y'}/dt$ thành dạng hiển. Vì F là hàm của ba đối số (t,y,y'), đạo hàm riêng $F_{y'}$ cũng phải là một hàm của cùng ba đối số đó. Do đó, đạo hàm toàn phần $dF_{y'}/dt$ gồm ba số hạng:

$$\frac{dF_{y'}}{dt}=\frac{\partial F_{y'}}{\partial t}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}=F_{ty'}+F_{yy'}y'(t)+F_{y'y'}y''(t) \qquad (2.17)$$

Thế biểu thức này vào (2.15), nhân tất cả với -1 và sắp xếp lại ta thu được dạng hiển của phương trình Euler:

$$F_{y'y'}y''(t)+F_{yy'}y'(t)+F_{ty'}-F_y=0 \quad \text{với mọi } t\in[0,T]$$

(phương trình Euler) (2.18)

Dạng khai triển này tỏ rõ rằng phương trình Euler nói chung là một phương trình vi phân phi tuyến cấp hai. Nghiệm tổng quát của nó do đó sẽ chứa hai hằng số tuỳ ý. Vì bài toán của chúng ta trong (2.1)-(2.3) có hai điều kiện biên (một đầu và một cuối), ta có đủ thông tin để xác định hai hằng số tuỳ ý và thu được lời giải xác định.

1.2. Thí dụ

Thí dụ 1: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \min\int_0^T y'^2(t)dt$$

Với điều kiện $y(0) = 0$, $y(T) = B$

Trong bài toán này, hàm dưới dấu tích phân là $F(t, y, y') = y'^2$. Như vậy, $F_{y'} = 2y'$, $F_{y'y'} = 2$, $F_y = 0$ và các đạo hàm cấp hai khác đều bằng không.

Theo phương trình Euler (2.18) $F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{ty'} - F_y = 0$ ta được:

$0 = 2y''(t)$, tương đương với $y''(t) = 0$. Tích phân sinh ra $y'(t) = c_1$, trong đó c_1 là hằng số tích phân. Tích phân lại một lần nữa ta có $y(t) = c_1t + c_2$, trong đó c_2 cũng là hằng số tích phân. Hằng số tích phân thứ hai được xác định từ điều kiện biên với $t = 0$ và $t = T$, cho ta điều kiện mà c_1 và c_2 phải thoả mãn.

$$y(0) = 0 = c_2, \qquad y(T) = B = c_1T + c_2$$

Giải các phương trình trên ta thu được $c_1 = B/T$, $c_2 = 0$; do đó lời giải của phương trình Euler với điều kiện biên là:

$$y(t) = Bt/T, \qquad 0 \le t \le T$$

Thí dụ 2: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y]=\int_0^1\{[y'(t)]^2+10ty(t)\}dt$$

với ràng buộc $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

Vì $F(t, y, y') = y'^2 + 10\ ty$, chúng ta có $F_y = 10t$, $F_{y'} = 2\ y'$ và $dF_{y'}/dt = 2y''$;

Như vậy phương trình Euler là $10t = 2y''$ hoặc:

$y''(t) = 5t$. Lấy tích phân phương trình vi phân này ta được:

$$y'(t) = 5t^2/2 + c_1$$

$$y(t) = 5t^3/6 + c_1t + c_2$$

trong đó c_1 và c_2 là các hằng số tích phân mà có thể tìm được nhờ sử dụng điều kiện biên:

$$y(0) = 1 = c_2, \quad y(1) = 2 = 5/6 + c_1 + c_2$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $c_2=1$; $c_1=1/6$. Vậy ta có:

$$y(t) = 5t^3/6 + t/6 + 1$$

Thí dụ 3: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int_{t_0}^{t_1}\left[ty'(t)+(y'(t))^2\right]dt$$

Với điều kiện $y(t_0) = 0$; $y(t_1) = y_1$,

trong đó t_0, t_1, y_0, và y_1 là các tham số đã cho.

Hàm số dưới dấu tích phân có dạng $F(t, y, y') = t\ y' + y'^2$ suy ra $F_y = 0$ và $F_{y'} = t + 2\ y'$, $dF_{y'}/dt = 0$, điều này có nghĩa là $t + 2\ y'(t) = c_1$, với c_1 là hằng số. Tích phân phương trình này ta được $y(t) = c_2 + c_1t/2 - t^2/4$.

Hằng số tích phân phải thoả mãn cặp phương trình sau:

$$y(t_0) = y_0 = c_2 + c_1 t_0/2 - t_0^2/4$$

$$y(t_1) = y_1 = c_2 + c_1 t_1/2 - t_1^2/4 .$$

Thí dụ 4: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int_0^5 (t + y^2 + 3y')\,dt$$

với các điều kiện biên y(0) = 0 và y(5) = 3.

Vì $F = t + y^2 + 3y'$, ta có:

$$F_y = 2y \qquad \text{và} \qquad F_{y'} = 3$$

Theo (2.18) ta có thể viết phương trình Euler là 2y = 0, với nghiệm:

$$y^*(t) = 0$$

Tuy nhiên, lưu ý rằng mặc dù nghiệm này hợp với điều kiện đầu y(0) = 0, nó vi phạm điều kiện cuối y(5) = 3. Như vậy, ta phải kết luận rằng trong tập các đường cong liên tục mà ta coi là chấp nhận được, không tồn tại cực trị nào.

Thí dụ này khá lý thú bởi vì nó dùng để minh hoạ rằng một số bài toán biến phân với điểm cuối đã cho có thể không có nghiệm. Đặc biệt hơn, nó gợi sự chú ý vào một trong hai kết quả khác thường có thể nảy sinh khi hàm dưới dấu tích phân là tuyến tính theo y'. Một kết quả, như minh hoạ trong Thí dụ 4, là không tồn tại nghiệm nào. Một khả năng khác, được chỉ ra trong Thí dụ 5, là trường hợp phương trình Euler là một đồng nhất thức, và vì nó tự động thoả mãn, bất cứ quỹ đạo (đường đi) chấp nhận được nào cũng là tối ưu.

Thí dụ 5: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int_0^T y'\,dt$$

với các điều kiện biên y(0) = α và y(t) = β.

Với F = y', ta có:

$$F_y = 0 \qquad F_{y'} = 1 \qquad \text{và} \qquad \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$$

Suy ra rằng phương trình Euler (2.18) luôn luôn thoả mãn. Trong thí dụ này, rõ ràng là từ phép tích phân trực tiếp ta được:

$$V[y] = [y(t)]\Big|_0^T = y(T) - y(0) = \beta - \alpha$$

Giá trị của V chỉ phụ thuộc vào các trạng thái đầu và cuối, không phụ thuộc đường đi nối hai điểm đầu mút đã cho.

Lý do là khi F tuyến tính theo y', $F_{y'}$ là một hằng số, và $F_{y'y'} = 0$, nên số hạng thứ nhất trong phương trình Euler (2.18) triệt tiêu. Khi đó phương trình Euler không còn là phương trình vi phân cấp hai, và sẽ không cho hai hằng số tuỳ ý trong nghiệm tổng quát của nó để ta có đường đi (quỹ đạo) theo thời gian vào các điều kiện biên đã cho. Do đó, trừ phi đường đi nghiệm đi qua các điểm mút nhờ sự trùng khớp ngẫu nhiên, nó không thể là một cực trị. Hoàn cảnh duy nhất mà một bài toán như vậy có thể đảm bảo có một nghiệm (với F tuyến tính theo y' và với các điểm đầu mút cố định) cũng là khi $F_y = 0$, mà nó, cùng với sự kiện là $F_{y'}$ = hằng số (hàm ý $dF_{y'}/dt = 0$), sẽ biến phương trình Euler (2.18) thành đồng nhất thức.

II. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Chúng ta đã viết phiếm hàm mục tiêu ở dạng tổng quát $V[y] = \int_0^T F(t, y, y')\,dt$, trong đó hàm lấy tích phân F có ba đối số t, y, và y', đối với một số bài toán, hàm lấy tích phân có thể không chứa tất cả ba đối số. Đối với các trường hợp đặc biệt như vậy, ta có thể rút ra các dạng đặc biệt của phương trình Euler mà nó thường (mặc dù không luôn luôn) tỏ ra là dễ giải hơn.

2.1. Trường hợp 1: F = F(t, y')

Trong trường hợp đặc biệt này, hàm F không chứa biến y, kéo theo $F_y = 0$ (2.19).

Vì vậy, phương trình Euler có dạng $dF_{y'}/dt = 0$, với nghiệm:

$$F_{y'} = \text{hằng số} \tag{2.20}$$

Thí dụ 1: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int_0^1 (ty' + y'^2)\,dt$$

Với các điều kiện biên y(0) = y(1) = 1.

Vì: $F = ty' + y'^2$ và $F_{y'} = t + 2y'$

(2.20) cho ta t + 2y'(t) = hằng số, hoặc:

$$y'(t) = -\frac{1}{2}t + c_1$$

Lấy tích phân trực tiếp, ta thu được:

$$y^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2 \quad \text{(nghiệm tổng quát)}$$

Với các điều kiện biên y(0) = y(1) = 1, dễ dàng thử lại rằng $c_1 = \frac{1}{4}$ và $c_2 = 1$. Do đó, cực trị là đường bậc hai

$$y^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + 1 \quad \text{(nghiệm đặc biệt)}$$

2.2. Trường hợp 2: F = F(y, y')

Vì F trong trường hợp này không phụ thuộc vào t, ta có $F_{ty'} = 0$, nên phương trình Euler (2.18) đơn giản là:

$$F_{y'y'}y''(t) + F_{yy'}y'(t) - F_y = 0$$

Giải phương trình này không dễ, nhưng nếu ta nhân cả hai vế với y', biểu thức bên vế trái trong phương trình mới thu được sẽ là $d(y'F_{y'} - F)/dt$, vì:

$$\frac{d}{dt}(y'F_{y'} - F) = \frac{d}{dt}(y'F_{y'}) - \frac{d}{dt}F(y, y')$$

$$= F_{y'}y'' + y'(F_{yy'}y' + F_{y'y'}y'') - (F_y y' + F_{y'}y'')$$

$$= y'(F_{yy'}y' + F_{y'y'}y'' - F_y)$$

Do đó, phương trình Euler là $d(y'F_{y'} - F)/dt = 0$, với nghiệm $y'F_{y'} - F$ = hằng số, hay cũng vậy:

$$F - y'F_{y'} = \text{hằng số} \qquad (2.21)$$

Kết quả này – phương trình Euler đơn giản đã tích phân một lần – là một phương trình vi phân cấp một mà trong một số trường hợp có thể dễ giải hơn so với phương trình Euler nguyên gốc .

2.3. Trường hợp 3: F = F(y')

Khi hàm F chỉ phụ thuộc y', nhiều đạo hàm trong (2.18) sẽ biến mất, kể cả $F_{y'y'}$ $F_{y't'}$ và F_y. Thực tế, chỉ còn lại số hạng thứ nhất, do đó phương trình Euler trở thành:

$$F_{y'y'}\, y''(t) = 0 \qquad (2.22)$$

Để thoả mãn phương trình này, ta phải có hoặc $y''(t) = 0$ hoặc $F_{y'y'} = 0$. Nếu $y''(t) = 0$, thì rõ ràng $y'(t) = c_1$ và $y(t) = c_1t + c_2$, tức là nghiệm tổng quát là một họ các đường thẳng hai tham số. Mặt khác, nếu $F_{y'y'} = 0$ thì $F_{y'}$ không phụ thuộc vào y', mà F chỉ phụ thuộc vào y', F là một hàm của chỉ riêng y', nghiệm của $F_{y'y'} = 0$ phải thể hiện như một giá trị đặc biệt của y'. Giả sử có một nghiệm thực trở lên $y' = k_i$, ta có thể suy ra rằng $y = k_it + c$, biểu thức này cũng biểu thị một họ đường thẳng. Do đó, khi cho hàm dưới dấu tích phân chỉ phụ thuộc riêng y', ta luôn luôn có thể lấy cực trị của nó là đường thẳng.

Thí dụ 1: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int (1 + y'^2)^{1/2}\, dt \qquad (2.23)$$

với các điều kiện biên $y(0) = A$ và $y(T) = Z$. (2.24)

Hàm dưới dấu tích phân $F = (1 + y'^2)^{1/2}$ chỉ phụ thuộc riêng y'. Do đó ta có thể kết luận ngay rằng cực trị là đường thẳng. Nhưng nếu ta muốn xem xét trường hợp riêng này một cách tường minh bằng phương trình Euler, ta có thể sử dụng (2.18). Với $F_y = 0$, phương trình Euler đơn giản là $dF_{y'}/dt = 0$, và nghiệm của nó là $F_{y'}$ = hằng số. Từ sự kiện $F_{y'} = y'/(1 + y'^2)^{1/2}$, ta có thể viết (sau khi lấy bình phương)

$$\frac{y'^2}{1 + y'^2} = c^2$$

Từ đó ta có thể biểu diễn y' qua c là: $y'^2 = c^2/1 - c^2$. Tương đương với:

$$y' = \frac{c}{(1 - c^2)^{1/2}} = \text{hằng số}$$

Vì y'(t), độ dốc của y(t), là hằng số, cực trị mong muốn y*(t) phải là đường thẳng.

Nói một cách chặt chẽ, ta mới chỉ tìm thấy một "cực trị" mà nó có thể là cực đại hoặc cực tiểu phiếm hàm đã cho. Tuy nhiên, một cách trực quan đây là bài toán tìm khoảng cách giữa 2 điểm đã cho nên ta thấy rõ ràng rằng khoảng cách giữa hai điểm đã cho quả thực được cực tiểu chứ không cực đại, bởi vì không thể nào có "khoảng cách dài nhất" giữa hai điểm đã cho.

2.4. Trường hợp 4: F = F(t, y)

Trong trường hợp đặc biệt này, đối số y' không có trong hàm F. Vì bây giờ ta có $F_{y'} = 0$, phương trình Euler rút gọn đơn giản về $F_y = 0$, hay:

$$F_y(t,y) = 0$$

Sự kiện đạo hàm y' không xuất hiện trong phương trình này nghĩa là phương trình Euler không phải là một phương trình vi phân. Bài toán suy biến. Vì trong nghiệm của nó không có hằng số tuỳ ý nào phải xác định theo các điều kiện biên đã cho, cực trị có thể không thoả mãn các điều kiện biên trừ trường hợp do trùng hợp ngẫu nhiên.

Tình huống này rất gần gũi với trường hợp trong đó hàm F là tuyến tính theo đối số y'. Lý do là hàm F(t,y) có thể xem như một trường hợp đặc biệt của F(t,y,y') với y' tham gia vào qua số hạng cộng 0y'với hệ số bằng 0. Như vậy, F(t,y) là "tuyến tính" theo y' theo một nghĩa đặc biệt.

2.5. Trường hợp 5 F tuyến tính theo ý: F = A(t, y) + B(t, y)y' (2.25)

Phương trình Euler là $A_y + B_y y' = B_t + B_y y'$, nghĩa là $A_y(t, y) = B_t(t, y)$, không có phương trình vi phân. Phương trình này có thể xem là hàm ẩn của y theo t. Nếu nghiệm y(t) của nó thoả mãn điều kiện biên thì nó có thể là lời giải tối ưu.

Trường hợp này là thí dụ về phương trình Euler là đồng nhất, thoả mãn đối với tập hợp bất kỳ 4 giá trị t, y, y', y". Ta hãy xét một số thí dụ sau:

Thí dụ 3 : Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)\,dt$$

với ràng buộc $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$

Vì $F = y'$, nên $F_y = 0$ và $F_{y'} = 1$, phương trình Euler là $0 = 0$, luôn luôn thoả mãn. Biểu thức dưới dấu tích phân là vi phân toàn phần, do đó:

$$\int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = y(t_1) - y(t_0) = y_1 - y_0$$

với hàm khả vi bất kỳ. Giá trị của tích phân chỉ phụ thuộc vào điều kiện cuối và không phụ thuộc vào quỹ đạo nối các điểm cuối.

Thí dụ 4: Giả sử chi phí của công ty là tuyến tính (biểu thức dưới dấu tích phân). Tìm cực tiểu của phiếm hàm:

$$\min \int_0^T [c_1 y'(t) + c_2 y(t)]dt$$

với ràng buộc $y(0) = 0$, $y(T) = B$

Trong đó:

B là cầu về lượng sản phẩm của công ty trong thời kỳ T,

$y(t)$ là lượng hàng tồn kho ở thời gian t,

$y' = dy/dt$ là tỷ lệ thay đổi hàng tồn kho theo thời gian,

c_1 là chi phí lưu kho của một đơn vị hàng tồn kho,

c_2 là chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm,

Tổng chi phí của công ty ở thời gian t bất kỳ là $c_1(t)y'(t) + c_2y(t)$.

Rõ ràng rằng: $F_y = c_2$ và $F_{y'} = c_1$, phương trình Euler là $c_2 = 0$. Điều này nghĩa là không có kế hoạch sản xuất tối ưu nếu có chi phí thực hiện dương ($c_2 > 0$) và một kế hoạch chấp nhận được bất kỳ là tối ưu nếu chi phí thực hiện bằng không. Cụ thể là:

Nếu chi phí sản xuất một đơn vị là hằng số thì tổng chi phí sản xuất B đơn vị là c_1B bất chấp biểu thời gian:

$$\int_0^T c_1 y'(t)dt = c_1[y(T) - y(0)] = c_1 B$$

Nếu chi phí thực hiện hàng tồn kho là không thì tất cả các kế hoạch sản xuất có thể có tốt như nhau. Nếu chi phí thực hiện tồn kho là dương, thì ngừng sản xuất ở thời điểm cuối để giảm tổng chi phí tích trữ.

Thí dụ 5: Tìm cực trị phiếm hàm:

$$\int_0^T tyy'dt$$

với ràng buộc $y(0) = 0$, $y(T) = B$.

Ta có $F_y = ty'$, $F_{y'} = ty$.

Phương trình Euler là $ty' = y + ty'$ hoặc $0 = y$, mà có thể thoả mãn chỉ nếu:

$$B = 0.$$

Để chứng minh rằng bài toán không có nghiệm, tích phân từng phần bằng cách đặt $yy'\,dt = du$ và $t = u$, do đó $y^2/2 = v$ và $dt = du$. Thì:

$$\int_0^T tyy'dt = \frac{1}{2}\left(B^2T - \int_0^T y^2dt\right) \le B^2T/2.$$

Cận trên của $B^2T/2$ có thể thực hiện được chỉ bằng cách đặt $y(t) = 0$, $0 \le t \le T$. Hàm này thoả mãn phương trình Euler nhưng không thoả mãn điều kiện biên (ngoại trừ khi $B = 0$). Hiển nhiên, không có cực tiểu; tích phân có thể làm cho nhỏ tuỳ ý.

Thí dụ 6: Tìm cực đại lợi nhuận có chiết khấu:

$$\max \int_0^T e^{-rt}[p(t)f(K(t)) - c(t)(K' + bK)]dt$$

với ràng buộc $K(0) = K_0$, $K(T) = K_T$,

Trong đó:

$c(t)$ là chi phí đơn vị của tổng đầu tư,

$p(t)$ là giá trên một đơn vị đầu ra (hàm đã cho của thời gian),

$K(t)$ là khối lượng vốn sản xuất,

$f(K)$ là đầu ra, và:

$K' + bK = I$ là tổng đầu tư (đầu tư ròng cộng với khấu hao).

Tính $F_K = e^{-rt}[pf'(K) - cb]$ và $F_{K'} = -e^{-rt}c$.

Phương trình Euler là:

$$d[-e^{-rt}c(t)]/dt = e^{-rt}[p(t)f'(K(t)) - c(t)b]$$

Để giải thích điều này , tích phân trên một khoảng thời gian nhỏ:

$$e^{-rt}c(t) - e^{-r(t+\Delta)}c(t+\Delta) = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}\left[p(s)f'(K(s)) - c(s)b\right]ds$$

Sự khác nhau về chi phí giữa việc mua một đơn vị vốn ở thời điểm thời gian t và $t + \Delta$ được bù đắp bởi lợi nhuận biên kiếm được do vốn trên thời kỳ $[t, t + \Delta]$.

Thực hiện đạo hàm đã chỉ ra trong phương trình Euler sinh ra đòi hỏi tương đương

$e^{-rt}[pf'(K) - cb] = e^{-rt}[rc - c']$, do đó quy tắc để lựa chọn mức vốn tối ưu $K^*(t)$ là

$p(t)f'(K^*(t)) = (r + b)c(t) - c'(t)$. Phương trình này không phải là phương trình vi phân đối với $K^*(t)$.

III. HAI TỔNG QUÁT HOÁ CỦA PHƯƠNG TRÌNH EULER

Thảo luận trên đây về phương trình Euler dựa trên một phiếm hàm tích phân với hàm dưới dấu tích phân $F(t,y,y')$. Tuy nhiên, có thể có những tổng quát hoá đơn giản sang trường hợp một vài biến trạng thái và trường hợp trong đó các đạo hàm bậc cao hơn xuất hiện như các đối số trong hàm F.

3.1. Trường hợp có một vài biến trạng thái

Với $n > 1$ biến trạng thái trong một bài toán đã cho, phiếm hàm trở thành:

$$V[y_1,\dots,y_n] = \int_0^T F(t, y_1,\dots,y_n, y'_1,\dots,y'_n)\,dt \qquad (2.26)$$

và sẽ có một cặp điều kiện đầu và điều kiện cuối đối với mỗi biến trong n biến trạng thái.

Một cực trị bất kỳ $y^*_j(t)$, $(j = 1,\dots, n)$, theo định nghĩa, phải mang lại giá trị của đường đi đạt cực trị so với tất cả các quỹ đạo (đường đi) lân cận. Một kiểu đường đi lân cận phát sinh từ việc mỗi lần thay đổi chỉ một hàm $y_j(t)$, chẳng hạn $y_1(t)$, trong khi tất cả các hàm $y_j(t)$ khác giữ cố định. Khi đó phiếm hàm chỉ phụ thuộc vào sự biến thiên trong $y_1(t)$ như thể ta đang giải quyết trường hợp biến trạng thái đơn. Do đó, phương trình Euler (2.15) vẫn phải được thoả mãn như một điều kiện cần, với điều kiện là ta thay ký hiệu

y thành y_1 để phản ánh bài toán mới. Hơn nữa, thủ tục này có thể được sử dụng một cách tương tự để thay đổi các hàm y_j khác, mỗi lần một hàm, để tạo ra các phương trình Euler khác. Như vậy, đối với trường hợp n biến trạng thái, phương trình Euler đơn (2.15) phải được thay bằng tập hợp n phương trình Euler đồng thời:

$$F_{y_j} - \frac{d}{dt} F_{y'_j} = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \quad (j = 1,2,\ldots,n) \quad (2.27)$$

(các phương trình Euler)

n phương trình này cùng với các điều kiện biên sẽ cho ta xác định các nghiệm $y^*_1(t),\ldots,y^*_n(t)$.

Mặc dù (2.27) là một sự tổng quát hoá trực tiếp của phương trình Euler (2.15) – bằng việc thay ký hiệu y bởi y_j – thủ tục này không thể áp dụng để tổng quát hoá (2.18). Để thấy tại sao không, ta hãy giả sử trong bài toán mới của chúng ta chỉ có hai biến trạng thái y và z. Khi đó hàm F sẽ là hàm có 5 đối số, $F(t,y,z,y',z')$, và các đạo hàm riêng $F_{y'}$ và $F_{z'}$ cũng vậy. Do đó, đạo hàm toàn phần của $F_{y'}(t,y,z,y',z')$ theo t sẽ chứa 5 số hạng:

$$\frac{d}{dt} F_{y'}(t, y, z, y', z') = F_{ty'} + F_{yy'} y'(t) + F_{zy'} z'(t) + F_{y'y'} y''(t) + F_{z'y'} Z''(t)$$

với một biểu thức 5 số hạng tương tự đối với $dF_{z'}/dt$. Như vậy, dạng mở rộng của các phương trình Euler đồng thời tương ứng với (2.18) trông phức tạp hơn nhiều so với (2.18):

$$F_{y'y'} y''(t) + F_{z'y'} z''(t) + F_{yy'} y'(t) + F_{zy'} z'(t) + F_{ty'} - F_y = 0 \qquad (2.28.1)$$

$$F_{y'z'} y''(t) + F_{z'z'} z''(t) + F_{yz'} y'(t) + F_{zz'} z'(t) + F_{tz'} - F_z = 0 \qquad (2.28.2)$$

với mọi $t \in [0, T]$

Thí dụ 1: Tìm cực trị của:

$$V[y, z] = \int_0^T (y + z + y'^2 + z'^2)\, dt$$

Từ hàm dưới dấu tích phân ta thấy rằng:

$F_y = 1$ $\qquad F_{y'} = 2y'$ $\qquad F_z = 1$ $\qquad F_{z'} = 2z'$

Như vậy, theo (2.27) ta có hai phương trình Euler đồng thời:

$$1 - 2y'' = 0 \quad \text{hay} \quad y'' = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2z'' = 0 \quad \text{hay} \quad z'' = \frac{1}{2}$$

Cũng có thể thu được cùng kết quả này từ (2.28).

Lấy tích phân, phương trình thứ nhất cho ta $y' = \frac{1}{2}t + c_1$, và vì vậy, cực trị của y là:

$$y^*(t) = \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2$$

Tương tự, cực trị của z là:

$$z^*(t) = \frac{1}{4}t^2 + c_3 t + c_4$$

Bốn hằng số tuỳ ý (c_1,..., c_4) có thể xác định qua bốn điều kiện biên liên quan với y(0), z(0), y(T), z(T).

3.2. Trường hợp các đạo hàm bậc cao hơn

Hãy xét một phiếm hàm chứa các đạo hàm bậc cao của y(t). Một cách tổng quát, điều này có thể viết

$$V[y] = \int_0^T F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)})\,dt \qquad (2.29)$$

Vì có mặt nhiều đạo hàm, trong trường hợp này các điều kiện biên phải quy định các giá trị đầu và cuối không những của y mà cả của các đạo hàm y', y", ..., cho đến và bao gồm cả đạo hàm $y^{(n-1)}$, tạo nên tổng cộng 2n điều kiện biên.

Để giải quyết trường hợp này, đầu tiên ta nhận xét rằng hàm F với biến trạng thái đơn y và các đạo hàm của y đến cấp n có thể biến đổi thành một dạng tương đương chứa n biến trạng thái và chỉ các đạo hàm cấp một của nó. Nói cách khác, phiếm hàm trong (2.29) có thể biến đổi thành dạng trong (2.26). Do đó, các phương trình Euler (2.27) hoặc (2.28) lại có thể áp dụng. Hơn nữa, phép biến đổi nói trên có thể cũng tự động tính cho các điều kiện biên.

Thí dụ 2: Biến đổi phiếm hàm:

$$V[y] = \int (ty^2 + yy' + y''^2)\,dt$$

với các điều kiện biên y(0) = a, y(T) = Z, y'(0) = α, y'(T) = β, hãy biến đổi phiếm hàm này thành dạng (2.26).

Để thực hiện được nhiệm vụ này, ta chỉ phải đưa vào một biến mới:

$$z \equiv y' \qquad \text{(kéo theo } z' \equiv y'')$$

Khi đó ta có thể viết lại hàm dưới dấu tích phân là:

$$F = ty^2 + yy' + y''^2 = ty^2 + yz + z'^2$$

Hàm này bây giờ chứa hai biến trạng thái y và z, không có đạo hàm cao hơn cấp một. Thay F mới vào phiếm hàm sẽ biến phiếm hàm trên về dạng (2.26).

Còn các điều kiện biên thì sao? Đối với biến trạng thái y, các điều kiện y(0) = A và y(T) = Z có thể giữ nguyên. Hai điều kiện kia đối với y' có thể trực tiếp viết lại như các điều kiện đối với biến trạng thái mới z: z(0) = α và z(T) = β. Điều này đã hoàn tất phép biến đổi.

Khi đã cho phiếm hàm (2.29), cũng có thể giải quyết nó một cách trực tiếp thay vì biến đổi nó thành dạng (2.26). Bằng một thủ tục tương tự như thủ tục sử dụng trong dẫn xuất ra phương trình Euler, một điều kiện cần đối với cực trị có thể được tìm thấy đối với (2.29). Điều kiện này, gọi là phương trình Euler-Poisson, là:

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}F_{y^{(n)}} = 0 \qquad (2.30)$$

với mọi $t \in [0,T]$ (phương trình Euler-Poisson)

Phương trình này nói chung là một phương trình vi phân cấp 2n. Như vậy nghiệm của nó sẽ chứa 2n hằng số tuỳ ý có thể được xác định thông qua 2n điều kiện biên[3].

Thí dụ 3 : Tìm cực trị của phiếm hàm trong Thí dụ 2.

Vì ta có:

$$F_y = 2ty + y' \quad F_{y'} = y \quad F_{y''} = 2y'' \qquad (2.31)$$

[3] Xem phụ lục

phương trình Euler là:

$$2ty + y' - \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 2y''}{dt^2} = 0 \quad \text{hay} \quad 2ty + 2y^{(4)} = 0 \qquad (2.32)$$

đó là một phương trình vi phân cấp bốn[4].

IV. MỘT SỐ ỨNG DỤNG KINH TẾ CỦA PHƯƠNG TRÌNH EULER

Bây giờ ta hãy xem xét các ứng dụng kinh tế của phương trình Euler đối với một số mô hình kinh tế mà ta đã trình bày ở chương I.

4.1. Mô hình tối ưu động của công ty độc quyền - mô hình của Evans

Xét bài toán tối ưu động của công ty độc quyền đã trình bày ở chương I. Bài toán đó có dạng sau:

4.1.1. Mô hình

Cực đại $\Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P')\,dt$ (2.33)

với ràng buộc $P(0) = P_0$ (P_0 cho trước) (2.34)

và $P(T) = P_T$ (T, P_T cho trước)

4.1.2. Quỹ đạo tối ưu của giá

Để tìm phương trình Euler chúng ta phải thay thế π cho F, và P cho y. Từ hàm lợi nhuận đã xét ở chương I dễ dàng thấy rằng:

$$\pi_P = -2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)P'$$

$$\pi_{P'} = -2\alpha h^2 P' - h(2\alpha a + \beta) + h(1 + 2\alpha b)P$$

và $\pi_{P'P'} = -2\alpha h^2 \quad \pi_{PP'} = h(1 + 2\alpha b) \qquad \pi_{tP'} = 0$

Biểu thức này biến (2.19) – sau khi chuẩn hoá - thành dạng đặc biệt:

$$P'' - \frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2} P = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}$$

(phương trình Euler) (2.35)

[4] Cách giải xem phần phụ lục

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với các hệ số hằng số và một số hạng hằng số, ở dạng tổng quát:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = a_3$$

Nghiệm tổng quát của nó có dạng là:

$$y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + y$$

Ở đây, các nghiệm đặc trưng r_1 và r_2 lấy các giá trị:

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)$$

và tích phân đặc biệt (tích phân riêng) $\overline{y}$ là:

$$\overline{y} = \frac{a_3}{a_2}$$

Như vậy đối với phương trình Euler của mô hình hiện thời (ở đây $a_1 =$ 0), ta có:

$$P^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \overline{P} \tag{2.36}$$

trong đó $\quad r_1, r_2 = \pm\sqrt{\dfrac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}}$ (các nghiệm đặc trưng)

và $\quad \overline{P} = \dfrac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1+\alpha b)}$ (nghiệm đặc biệt)

Lưu ý rằng hai nghiệm đặc trưng là thực và phân biệt dưới những chỉ định dấu của chúng ta. Hơn nữa, chúng chính xác chỉ khác nhau về dấu. Do đó ta có thể ký hiệu r là giá trị tuyệt đối chung của hai nghiệm và viết lại lời giải là:

$$P^*(t) = A_1 e^{rt} + A_2 e^{rt} + \overline{P} \quad \text{(nghiệm tổng quát)} \tag{2.36'}$$

Hai hằng số tuỳ ý A_1 và A_2 trong (2.36') có thể được xác định thông qua các điều kiện biên $P(0) = P_0$ và $P(T) = P_T$. Khi ta đặt lần lượt $t = 0$ và $t = T$ trong (2.36), ta nhận được hai phương trình đồng thời của hai biến A_1 và A_2:

$$P_0 = A_1 + A_2 + \overline{P}$$

$$P_T = A_1 e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \overline{P}$$

Với các giá trị nghiệm:

$$A_1 = \frac{P_0 - \overline{P} - (P_T - \overline{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}} \quad (2.37.1)$$

$$A_2 = \frac{P_0 - \overline{P} - (P_T - \overline{P})e^{-rT}}{1 - e^{\ 2rT}} \quad (2.37.2)$$

Việc xác định hai hằng số này hoàn tất việc giải bài toán, đối với toàn bộ đường đi của giá, P*(t) bây giờ được chỉ định qua các tham số đã biết T, P_0, P_T, α, β, γ, a, b và h. Trong các tham số này, tất cả trừ h đều đã chỉ định dấu. Nhưng vì tham số h tham gia vào lời giải (2.36') chỉ qua r, và chỉ dưới dạng số hạng bình phương h^2 ta có thể thấy rằng dấu đại số của nó sẽ không ảnh hưởng lên kết quả của chúng ta, mặc dù giá trị bằng số của nó sẽ có ảnh hưởng.

Tại lúc này, ta chưa thể thảo luận liệu quỹ đạo (đường đi) lời giải có thực sự làm cực đại lợi nhuận (hay đúng hơn là cực tiểu). Khi giả định nó quả là cực đại, thì một câu hỏi thích hợp là: Ta có thể nói gì về cấu hình tổng quát của đường đi của giá (2.36')? Không may thay, không thể có có câu trả lời đơn giản nào. Nếu $P_T > P_0$, giá của công ty độc quyền có thể tăng tối ưu một cách ổn định trong khoảng [0, T] từ P_0 đến P_T hoặc nó có thể phải hơi hạ xuống trước khi tăng đến mức P_T ở cuối kỳ, tuỳ thuộc các giá trị tham số. Trong trường hợp ngược lại $P_0 > P_T$, đường đi giá tối ưu được đặc trưng bởi tính không xác định tương tự.

4.1.3. Một quan điểm tổng quát hơn của bài toán

Mô hình của Evans chỉ định một hàm chi phí bậc hai và một hàm cầu tuyến tính. Trong một nghiên cứu tổng quát hơn về bài toán độc quyền động của Tintner, các hàm này không được chỉ định. Như vậy, hàm lợi nhuận đơn giản được viết là $\pi(P,P')$. Trong trình bày tổng quát như vậy, là công thức (2.21) (đối với trường hợp đặc biệt 2) có thể được sử dụng. Nó trực tiếp mang lại một điều kiện cần đơn giản:

$$\pi - P'\frac{\partial \pi}{\partial P'} = c \quad (2.38)$$

và có thể cho một giải thích kinh tế rõ ràng.

Để thấy điều này, đầu tiên hãy xét ý nghĩa kinh tế của hằng số c. Nếu lợi nhuận P không phụ thuộc vào tốc độ thay đổi của giá P' – nghĩa là, nếu ta xét bài toán độc quyền tĩnh như một trường hợp đặc biệt của mô hình động – thì $\partial\pi/\partial P' = 0$, và (2.38) rút gọn về $\pi = c$ (ký hiệu là π_s. Vậy, hằng số c biểu thị lợi nhuận độc quyền tĩnh. Do đó ta hãy ký hiệu nó là π_s (chỉ số s tượng trưng cho tĩnh). Tiếp theo, ta nhận xét rằng, nếu chia (2.38) cho π, số hạng thứ hai ở vế trái sẽ là:

$$\frac{\partial\pi}{\partial P'}\frac{P'}{\pi} \equiv \varepsilon_{\pi P'}$$

Nó biểu thị độ co giãn riêng của π theo P'. Quả thực, sau khi thực hiện phép chia đã nêu, phương trình có thể được sắp xếp lại thành quy tắc tối ưu:

$$\varepsilon_{\pi P'} = 1 - \frac{\pi_s}{\pi} \qquad (2.38')$$

Quy tắc này nói rằng công ty độc quyền phải luôn luôn chọn giá theo cách sao cho độ co giãn của lợi nhuận theo tốc độ thay đổi giá bằng $1 - \pi_S/\pi$.

Kết quả hết sức thú vị là: Nếu ta so sánh quy tắc độ co giãn này với quy tắc độ co giãn đối với công ty độc quyền tĩnh. Vì trong trường hợp độc quyền tĩnh, lợi nhuận chỉ phụ thuộc vào P, điều kiện cấp một đối với cực đại lợi nhuận đơn giản là $d\pi/dP = 0$. Nếu ta nhân hai vế với P/π, quy tắc được diễn đạt theo ngôn ngữ độ co giãn như sau: $\varepsilon_{\pi P} = 0$. Như vậy, trong khi công ty độc quyền tĩnh phải theo dõi độ co giãn của lợi nhuận theo giá cả và đặt nó bằng 0, công ty độc quyền động phải theo dõi độ co giãn của lợi nhuận theo tốc độ thay đổi giá và đặt nó bằng $1-\pi_S/\pi$.

4.1.4. Vấn đề giá cả cuối

Ta giả thiết rằng giá cả cuối P(T) là cho trước. Tuy nhiên, trong thực tế, công ty có thể kiểm soát P(T) theo ý mình mặc dù thời gian cuối T đã được định trước. Nếu vậy công ty sẽ gặp tình huống điểm cuối biến đổi, trong đó điều kiện biên $P(T) = P_T$ phải được thay bằng một điều kiện hoành thích hợp.

4.2. Mô hình lựa chọn giữa lạm phát và thất nghiệp

Trong mục này ta sẽ xem xét việc tìm điều kiện cần cho lời giải của bài toán lựa chọn giữa lạm phát và thất nghiệp đã trình bày ở chương I.

4.2.1. Mô hình

Mô hình của bài toán đó là như sau:

Mục tiêu của nhà hoạch định chính sách là:

$$\text{Cực tiểu} \qquad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}\,dt \qquad (2.39)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \pi(0) = \pi_0 \qquad (\pi_0 \text{ cho trước}) \qquad (2.40)$$

$$\text{và} \qquad \pi(T) = 0 \qquad (T \text{ cho trước}) \qquad (2.41)$$

4.2.2. Quỹ đạo nghiệm

Trên cơ sở hàm tổn thất đã cho, hàm dưới dấu tích phân $\lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}$ có các đạo hàm cấp một:

$$F_\pi = 2\left(\frac{\alpha}{j}\pi' + \alpha\pi\right)e^{-\rho t} \qquad (2.42)$$

$$F_{\pi'} = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} \qquad (2.43)$$

và với các đạo hàm cấp hai:

$$F_{\pi'\pi'} = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t} \qquad F_{\pi\pi'} = \frac{2\alpha}{j}e^{-\rho t} \qquad (2.44)$$

và

$$F_{t\pi'} = 2\rho\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} \qquad (2.45)$$

Do đó, công thức (2.18) cho ta (sau khi đơn giản hoá) điều kiện cần:

$$\pi'' - \rho\pi' - \Omega\pi = 0 \qquad \text{(phương trình Euler)} \qquad (2.46)$$

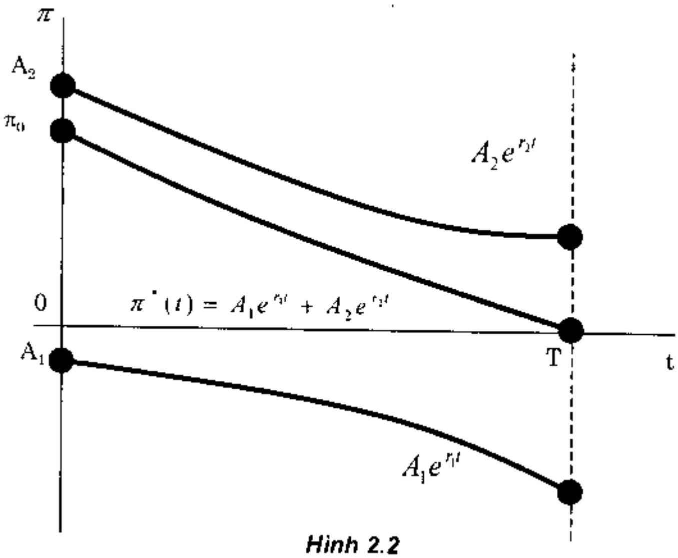
ở đây
$$\Omega \equiv \frac{\alpha\beta^2 j(\rho + j)}{1+\alpha\beta^2} > 0$$

Vì phương trình vi phân này là thuần nhất, nghiệm đặc biệt của nó bằng 0, và nghiệm tổng quát của nó đơn giản là hàm bù của nó:

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \qquad \text{(nghiệm tổng quát)} \qquad (2.47)$$

ở đây
$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}\right)$$

Các nghiệm đặc trưng là thực và phân biệt. Hơn nữa, vì căn bậc hai có giá trị bằng số lớn hơn ρ, ta biết rằng: $r_1 > 1$ và $r_2 < 0$ (2.48)



Hình 2.2

Để xác định các hằng số tuỳ ý A_1 và A_2, ta lần lượt đặt t = 0 và t = T, và sử dụng các điều kiện biên để thu được cặp quan hệ:

$$A_1 + A_2 = \pi_0$$

$$A_1e^{r_1T} + A_2e^{r_2T} = 0$$

Nếu giải đồng thời, các quan hệ này cho ta:

$$A_1 = \frac{-\pi_0e^{r_2T}}{e^{r_1T} - e^{r_2T}} \qquad A_2 = \frac{\pi_0e^{r_1T}}{e^{r_1T} - e^{r_2T}} \tag{2.49}$$

Do các dấu của r_1 và r_2 trong (2.48), nên ta có:

$$A_1 < 0 \qquad A_2 > 0 \tag{2.50}$$

Từ thông tin về dấu trong (2.50) và (2.48), ta có thể suy ra rằng đường đi $\pi^*(t)$ phải theo cấu hình tổng quát trong Hình 2.2. Với A_1 âm và r_1 dương, thành phần $A_1e^{r_1t}$ của đường đi này nổi lên như hình ảnh qua gương (qua trục hoành) của đường cong tăng theo hàm mũ. Mặt khác, thành phần $A_2e^{r_2t}$, với A_2 dương và r_2 âm, là đường cong giảm theo hàm mũ. Đường đi π^*, tổng của hai đường cong thành phần, bắt đầu từ điểm $(0,\pi_0)$ – ở đây $\pi_0 = A_1 + A_2$ – và giảm ổn định về phía điểm (T,0), là điểm cách hai đường cong

thành phần theo phương thẳng đứng như nhau. Sự kiện đường đi π^* thể hiện một sự biến động ổn định cũng có thể được kiểm chứng từ đạo hàm

$$\pi^{*\prime}(t) = r_1 A_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t} < 0$$

Khi đã tìm được $\pi^*(t)$ và $\pi^{*\prime}(t)$, ta cũng có thể rút ra một số kết luận về P và $(Y_f - Y)$.

B. CÁC ĐIỀU KIỆN HOÀNH ĐỐI VỚI CÁC BÀI TOÁN ĐIỂM ĐẦU MÚT BIẾN ĐỔI

Phương trình Euler - điều kiện cần cơ bản trong phép tính biến phân – thường là một phương trình vi phân cấp hai chứa hai hằng số tuỳ ý. Đối với các bài toán với các điểm đầu và cuối cố định, hai điều kiện biên cung cấp đủ thông tin để xác định hai hằng số tuỳ ý. Nhưng nếu điểm đầu hoặc điểm cuối biến đổi (chịu sự lựa chọn tuỳ ý), thì một điều kiện biên sẽ vắng mặt. Trường hợp như vậy sẽ xảy ra, chẳng hạn nếu công ty độc quyền động nêu trong mục **trên** không chịu một quy định nào về giá từ bên ngoài tại thời điểm **T**, và có thể giải quyết bằng cách lựa chọn P_T như một phần trong cả bài toán tối ưu. Trong trường hợp này, điều kiện biên $P(T) = P_T$ sẽ được thay bằng điều kiện gọi là điều kiện hoành. Trong mục này, ta sẽ đưa ra các điều kiện hoành thích hợp cho các kiểu điểm cuối biến đổi khác nhau.

I. ĐIỀU KIỆN HOÀNH TỔNG QUÁT

Để tiện trình bày, ta sẽ giả thiết rằng chỉ điểm *cuối* là biến đổi. Khi ta biết cách giải quyết với nó, kỹ thuật này dễ dàng mở rộng cho trường hợp điểm đầu biến đổi.

1.1. Bài toán điểm cuối biến đổi

Mục tiêu là:

Cực đại (hay cực tiểu) $V[y] = \int_0^T F(t, y, y')dt$ (2.51)

với ràng buộc $y(0) = A$ (A cho trước) (2.51')

và $y(T) = y_T$ (T, Y_T tự do) (2.51")

Bài toán này khác với bài toán trước ở chỗ thời gian cuối T và trạng thái cuối y_T bây giờ là "tự do" theo nghĩa chúng trở thành một phần của quá trình lựa chọn tối ưu. Tuy nhiên T chỉ nhận những giá trị tự do dương.

Để đi đến các điều kiện cần đối với quỹ đạo (đường) cực trị, cũng như trước đây, ta sẽ dùng đường cong xao động p(t), và biến ε để sinh ra những đường (quỹ đạo) lân cận nhằm so sánh với đường cực trị. Đầu tiên, giả sử rằng T* là thời gian cuối tối ưu đã biết. Khi đó bất kỳ giá trị nào của T ở ngay lân cận của T* có thể biểu thị là

$$T = T^* + \varepsilon\,\Delta T \tag{2.52}$$

ở đây ε là một số nhỏ và ΔT biểu thị một thay đổi nhỏ chọn tuỳ ý (và cố định) của T. Lưu ý rằng, vì T* đã biết và ΔT được chọn trước, T xem như một hàm của ε, T(ε), với đạo hàm:

$$\frac{dT}{d\varepsilon} = \Delta T \tag{2.53}$$

Cũng ε đó được sử dụng cùng với đường cong xao động p(t) để sinh ra các quỹ đạo (đường) lân cận của cực trị y*(t):

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon\,p(t) \text{ (suy ra } y'(t) = y^{*\prime}(t) + \varepsilon\,p'(t)) \tag{2.54}$$

Bây giờ đường cong p(t) vẫn phải thoả mãn điều kiện p(0) = 0, để buộc các quỹ đạo (đường) lân cận đi qua điểm đầu cố định, điều kiện kia – p(t) = 0 – bây giờ cần bỏ đi, bởi vì y_T là tự do. Bằng cách thay (2.54) vào phiếm hàm V[y], ta được hàm V(ε) có dạng:

$$V(\varepsilon) = \int_0^T F\left[t, \underbrace{y^*(t) + \varepsilon p(t)}_{y(t)}, \underbrace{y^{*\prime}(t) + \varepsilon p'(t)}_{y(t)}\right] dt \tag{2.55}$$

Bài toán của chúng ta là tối ưu hàm V theo ε.

1.2. Phương pháp xây dựng điều kiện hoành tổng quát

Điều kiện cần bậc nhất đối với một cực trị của hàm số V(ε) đơn giản là dV/dε = 0. Đạo hàm này là đạo hàm *toàn phần* tính đến cả ảnh hưởng trực tiếp của ε lên V, cũng như ảnh hưởng gián tiếp của ε lên V qua giới hạn trên của tích phân T.

Bước I. Lấy đạo hàm của tích phân (2.55) theo ε : dV/dε [5]

---

[5] Xem phụ lục

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \int_0^{T(\varepsilon)} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dt + F[T, y(T), y'(T)] \frac{dT}{d\varepsilon} \tag{2.56}$$

Tích phân ở vế phải rất giống với tích phân đã gặp trong phần bàn về phương trình Euler. Trên thực tế, nhiều phần trong quá trình suy diễn dẫn đến (2.14) vẫn thích hợp ở đây, với một ngoại lệ. Biểu thức $[F_{y'}p(t)]\Big|_0^T$ trong (2.13) không triệt tiêu trong bài toán hiện tại, mà lấy giá trị $[F_{y'}p(t)]_{t=T} = [F_{y'}]_{t=T}\, p(T)$, vì ta đã giả định rằng $p(0) = 0$ nhưng $p(T) \neq 0$. Với sự sửa đổi này đối với kết quả trước đây trong (2.14) ta có:

Số hạng thứ nhất trong (2.56) = $\int_0^T p(t)\left[F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}\right]dt + \left[F_{y'}\right]_{t=T} p(T)$

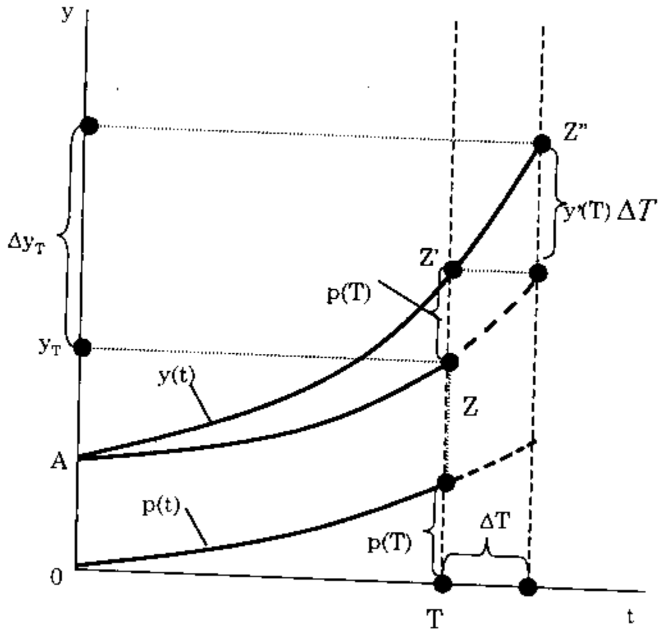
Theo (2.53) ta cũng có thể viết số hạng thứ hai trong (2.56) = $[F]_{t=T}\Delta T$

Thay các biểu thức này vào (2.56) , và đặt $dV/d\varepsilon = 0$, ta thu được điều kiện mới:

$$\int_0^T p(t)\left[F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}\right]dt + \left[F_{y'}\right]_{t=T} p(T) + [F]_{t=T}\Delta T = 0 \tag{2.57}$$

Trong ba số hạng trong vế trái của (2.57), mỗi số hạng chứa phần tử tuỳ ý độc lập riêng của nó: p(t) (toàn bộ đường cong xao động) trong số hạng thứ nhất, p(T) (giá trị cuối trên đường cong xao động) trong số hạng thứ hai, và ΔT (thay đổi chọn tuỳ ý theo T) trong số hạng thứ ba. Như vậy ta không thể định trước một sự bù trừ hay ước lược nào giữa các số hạng. Do đó, để thoả mãn điều kiện (2.57), mỗi một trong ba số hạng phải đặt bằng 0.

Khi số hạng thứ nhất trong (2.57) được đặt bằng 0 ta được phương trình Euler quen thuộc như trong (2.15). Điều này nói lên rằng phương trình Euler vẫn có hiệu lực như một điều kiện cần trong bài toán điểm đầu mút biến đổi. Hai số hạng kia, chỉ liên quan đến thời gian cuối T, là nơi để chúng ta tìm điều kiện hoành.



Hình 2.3

Bước II. Để làm việc đó, trước hết ta tìm cách thay biến tuỳ ý p(T) bằng cách biến đổi nó thành các số hạng của ΔT và Δy_T – những thay đổi hai biến gốc trong bài toán điểm cuối biến đổi T và y_T. Điều này có thể làm được nhờ sự gợi ý từ Hình 2.3. Đường cong AZ' biểu diễn một đường đi lân cận thu được bằng cách làm xao động đường đi AZ bởi $\varepsilon p(t)$, với ε được đặt bằng 1 cho thuận tiện. Lưu ý rằng, trong khi hai đường cong có cùng một điểm đầu bởi vì $p(0) = 0$, chúng có chiều cao khác nhau tại $t = T$ vì $p(T) \neq 0$ theo cách xây dựng đường cong xao động. Độ lớn của p(T), biểu thị bằng khoảng cách thẳng đứng ZZ', đo lường sự thay đổi trực tiếp trong y_T do xao động mang lại. Nhưng vì T cũng có thể thay đổi bằng một lượng $\varepsilon\Delta T$ (= ΔT vì ε = 1); đường cong AZ' phải mở rộng đến Z", nếu $\Delta T > 0$. Với một ΔT nhỏ, thay đổi thứ hai này trong y_T có thể xấp xỉ bởi $y'(T)\Delta T$. Vì vậy, tổng thay đổi trong y_T từ điểm Z đến điểm Z" là:

$$\Delta y_T = p(T) + y'(T)\,\Delta T.$$

Sắp xếp lại quan hệ này, ta biểu thị p(T) theo Δy_T và ΔT:

$$p(T) = \Delta y_T - y'(T)\,\Delta T \tag{2.58}$$

Bước III. Sử dụng (2.58) để khử p(T) trong (2.57), và bỏ số hạng thứ nhất trong (2.57), cuối cùng ta đi tới điều kiện hoành tổng quát mong muốn:

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_{t=T}\Delta T + \left[F_{y'}\right]_{t=T}\Delta y_T = 0 \tag{2.59}$$

Điều kiện này, không giống như phương trình Euler, chỉ đặt ra với một điểm thời gian T. Tuỳ thuộc dạng cụ thể của đường thẳng hay đường cong cuối, điều kiện tổng quát (2.59) có thể viết dưới những dạng đặc biệt khác nhau.

II. CÁC ĐIỀU KIỆN HOÀNH ĐẶC BIỆT

Trong Mục này, ta xét 5 loại điểm cuối biến đổi: đường cuối thẳng đứng, đường thẳng cuối nằm ngang, đường cong cuối, đường cuối thẳng đứng cụt, và đường thẳng cuối nằm ngang cụt.

2.1. Đường cuối thẳng đứng (Bài toán tầm thời gian cố định)

Trường hợp đường cuối thẳng đứng, như minh hoạ trong Hình 1.4a chương I, thì T cố định, $\Delta T = 0$, và số hạng đầu tiên trong (2.59) bị loại bỏ. Nhưng vì Δy_T là tuỳ ý và có thể lấy giá trị khác không, cách duy nhất để làm cho số hạng thứ hai trong (2.59) chắc chắn triệt tiêu là có $F_{y'} = 0$ tại $t = T$. Điều này làm nảy sinh điều kiện hoành:

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \tag{2.60}$$

mà đôi khi nó được gọi là điều kiện biên tự nhiên.

2.2. Đường cuối nằm ngang (Bài toán điểm cuối cùng (mút cuối) cố định)

Đối với trường hợp đường cuối nằm ngang, như minh hoạ trong Hình 1.4b chương I, sự kiện hoàn toàn ngược lại; bây giờ ta có $\Delta y_T = 0$ nhưng ΔT là tuỳ ý. Do đó, số hạng thứ hai trong (2.59) tự động biến mất, nhưng số hạng thứ nhất thì không. Vì ΔT là tuỳ ý, cách duy nhất để số hạng thứ nhất chắc chắn triệt tiêu là biểu thức trong ngoặc vuông bằng 0. Như vậy, điều kiện hoành là:

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \tag{2.61}$$

Có lẽ là có ích nếu ta cho (2.60) và (2.61) một ý nghĩa kinh tế. Ta hãy xem $F(t,y,y')$ như hàm lợi nhuận của một công ty, trong đó y biểu thị lượng vốn và y' biểu thị đầu tư ròng. Đầu tư ròng lấy đi các nguồn lực từ các hoạt động kinh doanh mang lại phần lợi nhuận để tạo vốn nhằm tăng lợi nhuận tương lai. Vì vậy, tồn tại một sự lựa chọn giữa lợi nhuận hiện tại và lợi nhuận tương lai. Tại thời gian t bất kỳ, với một lượng vốn y đã cho, một quyết định đầu tư cụ thể biểu thị bởi y'_0 - sẽ mang lại lợi nhuận hiện tại $F(t,y,y'_0)$. Ảnh hưởng của quyết định đầu tư lên lợi nhuận tương lai, thể hiện qua vai trò trung gian của vốn. Tốc độ tích luỹ vốn là y'_0; nếu ta có thể chuyển đổi ảnh hưởng đó thành một thước đo giá trị, thì ta có thể cộng nó vào hàm lợi nhuận hiện tại $F(t,y,y'_0)$ để có hiệu quả tổng hợp về lợi nhuận (hiện tại cũng như tương lai) của quyết định đầu tư. Giá trị quy đổi (giá bóng) của một đơn vị vốn đối với công ty có thể đo bởi đạo hàm $F_{y'}$. Điều đó có nghĩa là nếu ta quyết định để lại thêm (không chia) một đơn vị lợi nhuận ở thời điểm t, nó sẽ làm giảm lợi nhuận ăn chia hiện tại một lượng bằng $F_{y'}$ mà tương lai phải được bù lại. Do đó, quyết định đầu tư là $y' = y'_0$ thì hiệu quả tương lai quy đổi về lợi nhuận ăn chia hiện tại phải là: $y'_0 F_{y'_0}$, với chú ý rằng $F_{y'} \leq 0$. Như thế, ở mỗi thời điểm t hiệu quả tổng hợp gồm lợi nhuận hiện tại và tương lai quy đổi của quyết định chọn tốc độ đầu tư y'_0 là $F(t,y,y'_0) - y'_0 F_{y'_0}$.

Điều kiện hoành (2.61) cho bài toán điểm cuối T tự do nói rằng công ty phải chọn quỹ đạo tích luỹ vốn $y(t)$ vào thời điểm cuối T sao cho quyết định đầu tư tại $t = T$, thì lợi nhuận tổng hợp (hiện tại và tương lai) bằng không.

Bây giờ ta xét ý nghĩa của điều kiện hoành (2.60) cho bài toán trạng thái cuối y_T tự do. Nó có thể viết:

$$[-F_{y'}]_{t=T} = 0$$

và có nghĩa là hiệu quả đầu tư tại $t = T$ không mang lại hiệu quả. Điều kiện (2.60) sẽ được thoả mãn, chẳng hạn nếu ở lân cận $t = T$, ta có $y'(t) \equiv 0$, khi đó hàm F sẽ không phụ thuộc $y'(t)$, nghĩa là ở gần thời điểm cuối thì không đầu tư.

2.3. Đường cong cuối

Với một đường cong cuối $y_T = \phi(T)$, như minh hoạ trong Hình 1.4c chương I, cả Δy_T lẫn ΔT đều không được gán giá trị 0, nên không số hạng nào trong (2.59) bị loại ra. Tuy nhiên, với một ΔT nhỏ tuỳ ý, đường cong cuối muốn nói rằng $\Delta y_T = \phi' \Delta T$. Do đó có thể khử Δy_T trong (2.59) và kết hợp hai số hạng của nó thành dạng:

$$[F - y' F_{y'} + F_{y'}\phi']_{t=T} \Delta T = 0 .$$

Vì ΔT là tuỳ ý, ta có thể suy ra điều kiện hoành:

$$\left[F + (\phi' - y')F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \tag{2.62}$$

Không giống hai trường hợp trên bao hàm một ẩn số tại điểm cuối (hoặc y_T hoặc T), trường hợp đường cong cuối đòi hỏi ta xác định cả y_T lẫn T. Như vậy, cần hai mối quan hệ cho mục đích đó.

Điều kiện hoành (2.62) chỉ cho ta một quan hệ; quan hệ thứ hai được cho bởi phương trình $y_T = \phi(T)$.

2.4. Đường cuối thẳng đứng cụt

Đường cuối đứng cụt được mô tả bởi ràng buộc: t = T, $y_T \geq y_{min}$ trong đó y_{min} là mức cho phép thấp nhất của y. Cũng như trường hợp đường cuối thẳng đứng, trong trường hợp đường cuối thẳng đứng cụt, ta có $\Delta T = 0$. Khi đó từ điều kiện tổng quát (2.59) ta đi đến:

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} \Delta y_T = 0 \tag{2.63}$$

trong đó $\Delta y_T = y_T - y_T^*$, với y_T bất kỳ thoả mãn $y_T \geq y_{min}$.

Lời giải tối ưu y_T^* chỉ có thể có hai trường hợp là:

$$y_T^* > y_{min} \text{ hoặc} \tag{2.64}$$

$$y_T^* = y_{min}. \tag{2.65}$$

Do đó ta suy ra cách giải bài toán biến phân đường cuối đứng cụt. Trước hết tạm bỏ điều kiện $y_T \geq y_{min}$ và giải bài toán với đường cuối thẳng đứng, tức là tìm đường cực trị $y^*(t)$ thoả mãn điều kiện:

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \tag{2.66}$$

Nếu $y_T^* \geq y_{min}$, thì rõ ràng $y^*(t)$ cũng chính là nghiệm trong trường hợp đường cuối đứng cụt, vì nó thoả mãn (2.63).

Nếu $y_T^* < y_{min}$, thì y_T tối ưu nằm ở phía dưới khoảng cho phép và $\left[F_{y'}\right]_{t=T}$ không thể đạt giá trị 0 trên đường cuối bị cắt cụt. Nhưng khi bài toán với đường cuối đứng cụt có nghiệm $\tilde{y}^*(t)$, ta chắc chắn rằng $\tilde{y}^*(T) = y_{min}$, ta có thể tìm $\tilde{y}^*(t)$ bằng cách giải bài toán biến phân với điểm cuối cố định $(T, y_T = y_{min})$.

Do điểm cuối cố định, $\Delta y_T = 0$, điều kiện (2.63) được thoả mãn.

Kết hợp sự phân tích trên theo điều kiện Kuhn-Tucker lại thì điều kiện hoành cho bài toán cực đại sẽ là:

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} \leq 0\,,\ y_T^* \geq y_{min},\ (y^*_T - y_{min})[F_{y'}] = 0 \qquad (2.67)$$

2.5. Đường thẳng cuối nằm ngang cụt

Đường thẳng cuối nằm ngang có thể bị cắt cụt bởi ràng buộc $T \leq T_{max}$, ở đây T_{max} biểu thị một thời gian cho phép tối đa để hoàn thành nhiệm vụ – thời hạn chót. Việc phân tích tình huống này rất giống với đường cuối thẳng đứng cụt vừa thảo luận. Bằng lý luận tương tự, ta có thể rút ra điều kiện hoành sau đây đối với bài toán cực đại:

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_{t=T} \geq 0 \qquad T^* \leq T_{max} \qquad (2.68)$$

$$(T - T_{max})\left[F - y'F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \qquad \text{(đối với cực đại V)}$$

Nếu bài toán là *cực tiểu* V, bất đẳng thức thứ nhất trong (2.68) phải thay đổi, và điều kiện hoành là:

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_{t=T} \leq 0 \qquad T^* \leq T_{max} \qquad (2.68')$$

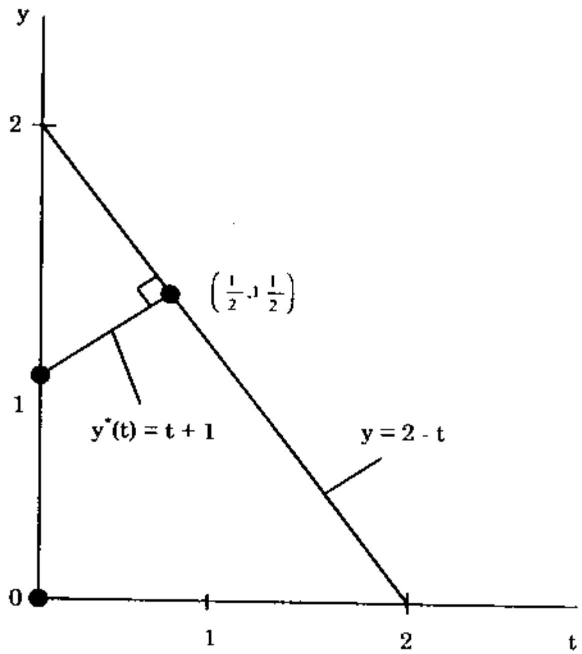
$$(T - T_{max})\left[F - y'F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \qquad \text{(đối với cực tiểu V)}$$

Thí dụ 1. Tìm đường cong với khoảng cách ngắn nhất giữa điểm (0,1) và đường $y = 2-t$.

Từ Hình 2.4 ta thấy rằng đây là một bài toán với đường cong cuối $y(T) = 2-T$, nhưng mặt khác nó giống như bài toán khoảng cách ngắn nhất. Bài toán có thể phát biểu như sau:

Cực đại $V[y] = \int_0^T \left(1 + y'^2\right)^{1/2} dt$

Với ràng buộc $y(0) = 1$ và $y(T) = 2 - T$



Hình 2.4

Trước đây ta đã chỉ ra rằng với hàm lấy tích phân đã cho, phương trình Euler mang lại một cực trị là đường thẳng, chẳng hạn:

$$y^* = at + b$$

a và b là hai hằng số tuỳ ý.

Từ điều kiện đầu $y(0) = 1$ ta có thể xác định ngay rằng $b = 1$. Để xác định hằng số a ta dựa vào điều kiện hoành (2.62). Vì ta có:

$$F = \left(1 + y'^2\right)^{1/2} \qquad \phi' = -1 \qquad F_{y'} = y'\left(1 + y'^2\right)^{-1/2}$$

điều kiện hoành có thể được viết là:

$$\left(1 + y'^2\right)^{1/2} + (-1 - y')y'\left(1 + y'^2\right)^{-1/2} = 0 \quad (\text{tại } t = T)$$

Nhân cả hai vế với $\left(1 + y'^2\right)^{1/2}$ và đơn giản hoá, ta có thể rút gọn phương trình này về dạng $y' = 1$ (tại $t = T$). Nhưng cực trị thực sự có độ dốc

không đổi, $y^{*\prime} = a$, tại mọi giá trị của t. Như vậy, ta phải có a = 1. Và do đó cực trị là:

$$y^*(t) = t + 1$$

Như chỉ ra trong Hình 2.4, cực trị là một đường thẳng gặp đường cuối tại điểm $\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$. Hơn nữa, ta lưu ý rằng, các độ dốc của đường cuối và cực trị tương ứng là -1 và +1. Như vậy hai đường thẳng là *trực giao* (vuông góc) với nhau. Trong trường hợp này điều kiện hoành đòi hỏi cực trị trực giao với đường thẳng cuối.

Thí dụ 2: Tìm cực trị của phiếm hàm:

$$V[y] = \int_0^T \left(ty' + y'^2\right)dt$$

với các điều kiện biên y(0) = 1, $y_T = 10$ và T tự do.

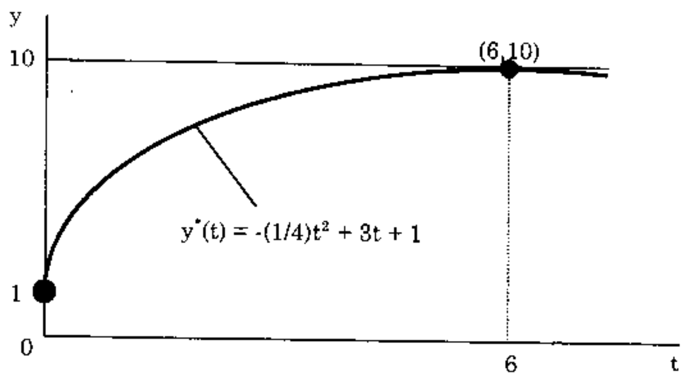
Ở đây ta có một bài toán đường thẳng cuối nằm ngang như biểu thị trên Hình 2.5.

Nghiệm tổng quát của phương trình Euler đối với bài toán này là một đường đi bậc hai:

$$y^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2$$

Vì y(0) = 1, ta có $c_2 = 1$. Nhưng hằng số c_1 phải được xác định nhờ điều kiện hoành. Vì $F = ty' + y'^2$, nên $F_{y'} = t + 2y'$, điều kiện đó trở thành:

$$ty' + y'^2 - y'(t + 2y') = 0 \qquad \text{(tại } t = T\text{)}$$



Hình 2.5

Điều kiện này rút gọn thành $-y'^2 = 0$ hay $y' = 0$ tại $t = T$. Nghĩa là, cực trị đòi hỏi có độ dốc bằng 0 tại thời gian cuối. Để đáp ứng điều kiện này, ta lấy vi phân nghiệm tổng quát để được $y^{*\prime}(t)$ rồi đặt $t = T$, và cho $y^{*\prime}(T) = 0$. Kết quả là phương trình $-T/2 + c_1 = 0$; suy ra rằng $c_1 = T/2$. Tuy nhiên, ta vẫn không thể xác định giá trị cụ thể của c_1 mà không biết giá trị của T.

Để tìm T, ta tận dụng thông tin là $y_T = 10$ (đường thẳng cuối nằm ngang). Thế $c_1 = T/2$ và $c_2 = 1$ vào nghiệm tổng quát, đặt $t = T$, và cho biểu thức kết quả lấy giá trị đã cho bằng 10, ta thu được phương trình:

$$-\frac{1}{4}T^2 + \frac{1}{2}T^2 + 1 = 10$$

Các giá trị nghiệm của T là ±6. Loại bỏ giá trị âm, ta kết thúc với $T^* = 6$. Khi đó suy ra rằng $c_1 = 3$, và cực trị là:

$$y^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 3t + 1$$

Đường đi này được chỉ ra trong Hình 2.5. Như đòi hỏi bởi điều kiện hoành, cực trị quả thực có độ dốc 0 tại điểm cuối (6,10). Không giống như trong thí dụ 1, trong đó điều kiện hoành chuyển thành đòi hỏi trực giao, trong thí dụ này, điều kiện hoành bắt buộc nghiệm cực trị có cùng độ dốc với với đường cuối nằm ngang đã cho tại t = T.

2.6. Ứng dụng kinh tế của điều kiện hoành

2.6.1. Ứng dụng vào mô hình độc quyền động

Hãy xét mô hình Evans về một công ty độc quyền động như một bài toán với thời gian cuối cố định T, nhưng trạng thái cuối biến đổi $P_T \geq P_{min}$. Với đường thẳng cuối thẳng đứng cắt cụt như vậy, điều kiện hoành thích hợp là (2.67). Để đơn giản, trong thảo luận này, ta sẽ gán các giá trị bằng số cụ thể cho các tham số, vì nếu không các biểu thức nghiệm sẽ trở nên quá cồng kềnh.

Cho hàm chi phí và hàm cầu là:

$$C = \frac{1}{10}Q^2 + 1000 \qquad \text{(nghĩa là, } \alpha = \frac{1}{10}, \beta = 0, \gamma = 1000)$$

$$Q = 160 - 8P + 100P' \quad \text{(nghĩa là, a = 160, b = 8, h = 100)}$$

Khi đó hàm lợi nhuận trở thành:

$$\pi \equiv PQ - C = 416P - 14{,}4P^2 + 260PP' - 1000P'^2 - 3200P' - 3560$$

suy ra rằng:

$$\pi_{P'} = 260P - 2000P' - 3200 \tag{2.69}$$

Đây là đạo hàm cần thiết trong điều kiện hoành.

Vì các giá trị tham số đã đặt ra mang lại các nghiệm đặc trưng và nghiệm đặc biệt:

$$r_1, r_2 = \pm 0{,}12 \qquad \overline{P} = 14\frac{4}{9}$$

nghiệm tổng quát của phương trình Euler là:

$$P^*(t) = A_1e^{0,12t} + A_2e^{-0,12t} + 14\frac{4}{9} \tag{2.70}$$

Nếu ta giả định thêm rằng các điều kiện biên là:

$$P_0 = 11\frac{4}{9} \qquad P_T = 15\frac{4}{9} \qquad \text{và} \qquad T = 2$$

thì theo (2.37.1) và (2.37.2), các hằng số A_1 và A_2 trong bài toán điểm cuối cố định phải có các giá trị (sau khi làm tròn):

$$A_1 = 6{,}93 \qquad A_2 = -9{,}93$$

Có thể kiểm tra lại bằng cách thay thế hai hằng số này vào (2.70) mang lại giá cuối $P^*(2) = 15\frac{4}{9}$ như đòi hỏi.

Bây giờ chấp nhận một trạng thái cuối biến đổi $P_T \geq 10$. Sử dụng điều kiện hoành (2.67), đầu tiên ta đặt biểu thức $\pi_{P'}$ trong (2.69) bằng 0 tại t = T = 2. Sau khi chuẩn hoá, nó dẫn tới điều kiện:

$$P(T) - 0{,}13P(T) = -1{,}6 \tag{2.71}$$

Số hạng P(T) ở đây chỉ nghiệm tổng quát P*(t) trong (2.70) lấy giá trị tại t = T = 2. Và P'(T) là đạo hàm của (2.70) lấy giá trị tại cùng thời điểm đó. Nghĩa là,

$$P(T) = A_1e^{0,24} + A_2e^{-0,24} + 14\frac{4}{9}$$

$$P'(T) = 0{,}12A_1e^{0,24} - 0{,}12A_2e^{-0,24}$$

Như vậy, (2.71) có thể được viết lại là:

$$-0,01A_1e^{0,24} - 0,25A_2e^{-0,24} = 0,2778$$

Để giải đối với A_1 và A_2, ta cần kèm điều kiện này với điều kiện gắn với điểm đầu,

$$A_1 + A_2 = -3$$

thu được từ (2.70) bằng cách đặt t = 0 và đặt kết quả bằng $P_0 = 11\frac{4}{9}$. Các giá trị nghiệm của A_1 và A_2 thành ra là:

$$A_1 = 4,72 \qquad A_2 = -7,72$$

cho ta nghiệm xác định:

$$P^*(t) = 4,716e^{0,12t} - 7,716e^{-0,12t} + 14\frac{4}{9} \tag{2.72}$$

Còn phải kiểm tra nghiệm này có thoả mãn điều chỉ định cuối $P_T \geq 10$ hay không. Đặt t = T = 2 trong (2.72), ta thấy rằng P*(2) = 14,37. Vì giá trị này thoả mãn giới hạn đã đặt ra, bài toán đã giải xong.

2.6.2. Sự lựa chọn giữa lạm phát và thất nghiệp

Bài toán lạm phát - thất nghiệp đã trình bày có một điểm cuối cố định đòi hỏi tốc độ lạm phát kỳ vọng π đạt giá trị 0 tại thời gian cuối T đã cho: π(T) = 0. Có thể đặt câu hỏi: Điều gì sẽ xảy ra nếu điều kiện cuối trở thành một đường thẳng cuối thẳng đứng?

Từ (2.47), nghiệm tổng quát của phương trình Euler là:

$$\pi^*(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} \tag{2.73}$$

Điều kiện đầu, vẫn giả định là $\pi(0) = \pi_0 > 0$, đòi hỏi (bằng cách đặt t = 0 trong nghiệm tổng quát) rằng:

$$A_1 + A_2 = \pi_0 \tag{2.74}$$

Tuy nhiên, với một đường thẳng cuối thẳng đứng tại T đã cho, bây giờ ta phải sử dụng điều kiện hoành $\left[F_{y'}\right]_{t=T} = 0$. Trong mô hình này, điều kiện này có dạng:

$$F_{\pi'} = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} = 0 \quad \text{(tại } t = T) \tag{2.75}$$

Điều kiện này có thể thoả mãn nếu và chỉ nếu biểu thức trong dấu ngoặc bằng 0. Như vậy, điều kiện hoành có thể viết (sau khi đơn giản) là:

$$\pi'(T) + \sigma\pi(T) = 0 \tag{2.75'}$$

ở đây $$\sigma \equiv \frac{\alpha\beta^2 j}{1+\alpha\beta^2}$$

Tất nhiên, các biểu thức $\pi(T)$ và $\pi'(T)$ thu được từ nghiệm tổng quát $\pi^*(t)$ và đạo hàm của nó, cả hai lấy giá trị tại $t = T$. Sử dụng (2.73), ta có thể cho điều kiện (2.75') dạng cụ thể:

$$(r_1 + \sigma)A_1 e^{r_1 T} + (r_2 + \sigma)A_2 e^{r_2 T} = 0 \tag{2.75''}$$

Giải đồng thời (2.74) và (2.75"), ta tìm được các giá trị xác định của các hằng số A_1 và A_2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\pi_0(r_2+\sigma)e^{r_2 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T} - (r_2+\sigma)e^{r_2 T}} \\ A_2 &= \frac{\pi_0(r_1+\sigma)e^{r_1 T}}{(r_1+\sigma)e^{r_1 T} - (r_2+\sigma)e^{r_2 T}} \end{aligned} \tag{2.76}$$

Các giá trị này có thể dùng để biến nghiệm tổng quát thành nghiệm đặc biệt.

Bây giờ với trạng thái cuối được xác định nội sinh, từ nghiệm này nổi lên giá trị nào của $\pi^*(T)$? Để thấy điều này, ta thế (2.76) vào nghiệm tổng quát (2.73), và xác định giá trị của kết quả tại $t = T$. Câu trả lời là:

$$\pi^*(T) = 0$$

Từ hàm tổn thất đã cho, đòi hỏi này - đưa tốc độ lạm phát kỳ vọng xuống 0 tại thời gian cuối – không có gì ngạc nhiên. Và, vì dạng trước của bài toán đã có giá trị mục tiêu của π đặt bằng $\pi_T = 0$, việc chuyển sang trường hợp đường thẳng cuối thẳng đứng không làm thay đổi kết quả.

III. BA HƯỚNG TỔNG QUÁT HOÁ

Những gì ta đã biết về điểm cuối biến đổi có thể được tổng quát hoá theo ba hướng.

3.1. Điểm đầu biến đổi

Nếu điểm đầu có thể biến đổi, thì điều kiện biên y(0) = A không còn đúng nữa, và cần một điều kiện hoành đầu để lấp chỗ trống đó. Vì các điều kiện hoành phát triển trong mục trước có thể áp dụng cho trường hợp các điểm đầu biến đổi, ta không cần thảo luận xa thêm. Nếu bài toán có *cả* điểm đầu và cuối biến đổi thì hai điều kiện hoành phải được sử dụng để xác định hai hằng số tuỳ ý nảy sinh từ phương trình Euler.

3.2. Trường hợp nhiều biến trạng thái

Khi trong phiếm hàm mục tiêu có vài biến trạng thái, do đó hàm dưới dấu tích phân là:

$$F(t, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)$$

thì điều kiện hoành (tại điểm cuối) tổng quát (2.59) phải thay đổi là:

$$\begin{aligned}&[F-(y'_1 F_{y'_1}+\ldots+y'_n F_{y'_n})]_{t=T}\Delta T\\ &\quad+\left[F_{y'_1}\right]_{t=T}\Delta y_{1T}+\ldots+\left[F_{y'_n}\right]_{t=T}\Delta y_{nT}=0\end{aligned} \tag{2.77}$$

Rõ ràng rằng (2.59) là một trường hợp riêng của (2.77) với n = 1.

Khi điểm cuối cố định, số hạng thứ nhất trong (2.77) triệt tiêu, bởi vì $\Delta T = 0$. Tương tự, nếu biến y_j bất kỳ có một giá trị cuối cố định thì $\Delta y_{jT} = 0$ và số hạng thứ j trong (2.77) triệt tiêu. Tuy nhiên, đối với các số hạng còn lại, ta có thể kỳ vọng tất cả các biểu thức Δ biểu thị các lượng tuỳ ý được xác định độc lập. Như vậy, không có bất kỳ một ràng buộc giả định trước nào khiến các số hạng trong (2.77) có thể triệt tiêu nhau. Do đó, mỗi số hạng còn lại sẽ sinh ra một điều kiện hoành riêng rẽ.

Các thí dụ sau dây minh hoạ ứng dụng của (2.77) khi n = 2, với các biến trạng thái ký hiệu bởi y và z. Điều kiện hoành tổng quát đối với n = 2 là:

$$[F-(y'F_{y'}+z'F_{z'})]_{t=T}\Delta T+[F_{y'}]_{t=T}\Delta y_T+[F_{z'}]_{t=T}\Delta z_T=0 \tag{2.77'}$$

Thí dụ 1: Giả sử rằng T là cố định, nhưng cả y_T và z_T tự do. Khi đó ta có $\Delta T = 0$, nhưng Δy_T và Δz_T là tuỳ ý. Loại bỏ số hạng thứ nhất trong (2.77') và đặt từng số hạng trong hai số hạng còn lại bằng 0, ta thu được các điều kiện hoành:

$$[F_{y'}]_{t=T}=0 \qquad \text{và} \qquad [F_{z'}]_{t=T}=0$$

Hãy so sánh với (2.60).

Thí dụ 2: Giả sử rằng các giá trị cuối của y và z đòi hỏi thoả mãn các ràng buộc:

$$y_T = \phi(T) \qquad \text{và} \qquad z_T = \psi(T)$$

Khi đó ta có một cặp đường cong cuối. Với ΔT nhỏ, ta có thể kỳ vọng biểu thức sau đây là đúng:

$$\Delta y_T = \phi'\Delta T \qquad \text{và} \qquad \Delta z_T = \psi'\Delta T$$

Sử dụng các biểu thức này để khử Δy_T và Δz_T trong (2.77'), ta thu được:

$$[F + (\phi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{t=T}\Delta T = 0$$

Vì ΔT là tuỳ ý, điều kiện hoành trở thành:

$$[F + (\phi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{t=T} = 0$$

Hãy so sánh với (2.62).

Với điều kiện hoành này, các đường cong cuối $y_T = \phi(T)$ và $z_T = \psi(T)$, và các điều kiện đầu $y(0) = y_0$ và $z(0) = z_0$, bây giờ ta có 5 phương trình để xác định T* cũng như 4 hằng số tuỳ ý trong hai phương trình Euler.

3.3. Trường hợp các đạo hàm cấp cao hơn

Khi phiếm hàm V[y] có hàm dưới dấu tích phân $F(t,y,y',\dots,y^{(n)})$, điều kiện hoành (tại điểm cuối) lại đòi hỏi cải biên. Do hiếm khi sử dụng các đạo hàm bậc cao trong các ứng dụng kinh tế, ta sẽ nêu ra ở đây điều kiện hoành tổng quát chỉ đối với trường hợp $F(t,y,y',y'')$:

$$\begin{aligned}\left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dt}F_{y''}\right]_{t=T}&\Delta T \\ + \left[F_{y'} - \frac{d}{dt}F_{y''}\right]_{t=T}&\Delta y_T + \left[F_{y''}\right]_{t=T}\Delta y'_T = 0\end{aligned} \tag{2.78}$$

Ký hiệu mới $\Delta y'_T$ trong điều kiện này biểu thị sự thay đổi độ dốc tại điểm cuối của đường đi y khi nó bị xao động. Theo biểu diễn của Hình 2.5, $\Delta y'_T$ chỉ sự khác nhau giữa độ dốc của đường đi AZ" tại Z" và độ dốc của đường đi AZ tại Z. Nếu trong bài toán ta chỉ định độ dốc ở cuối phải vẫn

không đổi thì $\Delta y_T' = 0$, và số hạng cuối cùng trong (2.78) không còn. Nếu độ dốc tại điểm cuối biến đổi tự do thì số hạng cuối cùng sẽ dẫn đến điều kiện $F_{y'} = 0$ tại $t = T$.

IV. ỨNG DỤNG KINH TẾ CỦA ĐIỀU KIỆN HOÀNH TỔNG QUÁT - ĐIỀU CHỈNH TỐI ƯU CẦU LAO ĐỘNG

Xét một công ty, công ty này đã quyết định tăng đầu vào lao động của nó từ L_0 lên một mức chưa xác định L_T sau khi có sự giảm tiền công tại $t = 0$. Giả định là việc điều chỉnh đầu vào lao động cần có một chi phí C thay đổi theo tốc độ thay đổi $L'(t)$ của L. Như vậy, công ty phải quyết định về tốc độ điều chỉnh tốt nhất về L_T cũng như chính độ lớn của L_T. Đây là cốt lõi của bài toán điều chỉnh lao động của Hamermesh.

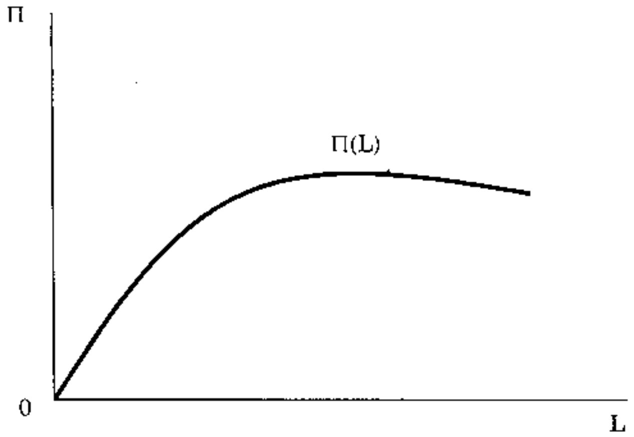
4.1. Bài toán

Để đơn giản, giả sử lợi nhuận của công ty được cho bằng hàm lợi nhuận $\pi(L)$, với $\pi''(L) < 0$, như minh hoạ trong Hình 2.6. Đầu vào lao động được coi là yếu tố duy nhất quyết định lợi nhuận bởi vì chúng ta đã gộp tất cả các khía cạnh của sản xuất và cầu trong hàm lợi nhuận. Chi phí để điều chỉnh L được giả định là

$$C(L') = bL'^2 + k \quad (b > 0, \text{ và } \; k > 0 \text{ khi } L' \neq 0) \qquad (2.79)$$

Như vậy lợi nhuận ròng tại thời gian bất kỳ là $\pi(L) - C(L')$.

Bài toán của công ty là cực đại tổng lợi nhuận ròng Π trong quá trình thay đổi đầu vào lao động. Vì công ty phải chọn không chỉ mức tối ưu L_T mà cả thời gian tối ưu T* để hoàn thành việc điều chỉnh, ta có cả trạng thái cuối lẫn thời gian cuối tự do. Một điểm khác cần lưu ý về bài toán là lợi nhuận phải bao gồm không những lợi nhuận ròng từ $t = 0$ đến $t = T^*$ (một tích phân xác định), mà cả giá trị vốn hoá của lợi nhuận trong thời kỳ sau T*, mà giá trị này cũng bị ảnh hưởng việc chọn L_T và T. Vì mức lợi nhuận tại thời gian T là $\pi(L_T)$, giá trị qui đổi về thời điểm hiện tại $t = 0$ lợi nhuận của nó là $\pi(L_T)e^{-\rho t}$, ở đây ρ là hệ số chiết khấu cho trước và $T = T^*$.



Hình 2.6

Vậy giá trị vốn hoá quy đổi về giá trị hiện tại của lợi nhuận $\pi(L_T)$ là: $\pi(L_T)e^{-\rho T}/\rho$ (theo công thức vốn hoá chuẩn). Do đó, bài toán có thể phát biểu như sau:

$$\text{Cực đại} \qquad \Pi[L] = \int_0^T \left[\pi(L) - bL'^2 - k\right]e^{-\rho t}dt + \frac{1}{\rho}\pi(L_T)e^{-\rho T} \qquad (2.80.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad L(0) = L_0 \qquad (L_0 \text{ cho trước}) \qquad (2.80.2)$$

$$\text{và} \qquad L(T) = L_T \qquad (L_T > L_0 \text{ tự do, T tự do}) \qquad (2.80.3)$$

Nếu số hạng cuối cùng trong phiếm hàm là một hằng số, ta có thể bỏ qua nó trong quá trình tối ưu hoá. Nhưng vì số hạng đó – hãy gọi nó là z(T) – thay đổi theo lựa chọn tối ưu L_T và T, ta phải xét đến nó dưới dạng hiển. Như thảo luận trước đây của chúng ta về bài toán Mayer và bài toán Bolza giá trị vốn hoá z(T) có thể xem như được tích luỹ trong suốt khoảng thời gian (0,T):

$$z(T) = \int_0^T z'(t)\,dt + z(0) \qquad (2.81)$$

Giá trị vốn hoá quy đổi của lợi nhuận ở thời điểm t là:

$$z(t) = \frac{1}{\rho}\pi(L)e^{-\rho t} \qquad \text{vì thế}$$

$$z'(t) = \left[-\pi(L) + \frac{1}{\rho}\pi'(L)L'\right]e^{-\rho t}$$

nên ta có thể viết số hạng "sau T*" trong (2.80) như sau:

$$\frac{1}{\rho}\pi(L_T)e^{-\rho T} = \int_0^T\left[-\pi(L)+\frac{1}{\rho}\pi'(L)L'\right]e^{-\rho t}dt + \frac{1}{\rho}\pi(L_0) \qquad (2.81')$$

Thay thế (2.81') vào phiếm hàm trong (2.80), sau khi kết hợp hai tích phân, cho ta hàm mới nhưng tương đương:

$$\Pi(L) = \int_0^T\left[-bL'^2-k+\frac{1}{\rho}\pi'(L)L'\right]e^{-\rho t}dt + \frac{1}{\rho}\pi(L_0) \quad (2.82)$$

Trong khi phiếm hàm này vẫn chứa một số hạng phụ thêm ngoài tích phân, số hạng đó là một hằng số. Cho nên nó chỉ ảnh hưởng lên giá trị Π tối ưu, mà không ảnh hưởng đường đi tối ưu L và cũng không ảnh hưởng lên giá trị tối ưu L_T và T.

4.2. Lời giải

Để tìm phương trình Euler, từ (2.82) ta thấy rằng:

$$F = \left[-bL'^2-k+\frac{1}{\rho}\pi'(L)L'\right]e^{-\rho t}$$

$$F_L = \frac{1}{\rho}\pi''(L)L'e^{-\rho t};\quad F_{L'} = \left[-2bL'+\frac{1}{\rho}\pi'(L)\right]e^{-\rho t}$$

Như vậy, từ công thức (2.15), ta thu được điều kiện:

$$L''-\rho L'+\frac{\pi'(L)}{2b} = 0 \quad \text{(phương trình Euler)} \qquad (2.83)$$

Điều kiện hoành trong bài toán này nhiều gấp đôi. Cả L_T lẫn T là tự do, ta phải thoả mãn cả các điều kiện hoành (2.60) lẫn (2.61). Điều kiện $[F_{L'}]_{t=T} = 0$ có nghĩa là:

$$L'-\frac{\pi'(L)}{2\rho b} = 0 \quad (\text{tại } t = T) \qquad (2.84)$$

Và điều kiện $[F - L'F_{L'}]_{t=T} = 0$ có nghĩa là (sau khi đơn giản hoá):

$$L'^2 = \frac{k}{b} \quad \text{hay} \quad L' = \sqrt{\frac{k}{b}} \qquad (\text{tại } t = T) \qquad (2.85)$$

ở đây ta lấy căn bậc hai dương bởi vì L được giả định là tăng từ L_0 lên L_T. Hai điều kiện hoành, cùng với điều kiện đầu $L(0) = L_0$, có thể cung cấp

thông tin cần thiết cho việc xác định các hằng số tuỳ ý trong đường đi lời giải, cũng như để xác định L_T và T tối ưu. Trong (2.84) và (2.85), ta ký hiệu L' là đạo hàm của nghiệm tổng quát của phương trình Euler lấy giá trị tại t = T.

Để thu được một nghiệm định lượng cụ thể, cần chỉ định dạng của hàm lợi nhuận $\pi(L)$. Vì mục đích ban đầu của chúng ta trong việc đưa vào thí dụ này là để minh hoạ một trường hợp với cả trạng thái cuối và thời gian cuối tự do, và để minh hoạ bài toán Bolza, ta sẽ không đi sâu vào lời giải định lượng cụ thể.

C. CÁC ĐIỀU KIỆN CẤP HAI VÀ ĐIỀU KIỆN ĐỦ VỀ TÍNH LỒI LÕM

Thảo luận của chúng ta cho đến lúc này đã tập trung vào nhận diện đường cực trị của một bài toán, mà chưa chú ý đến việc nó làm cực đại hoặc cực tiểu hoá phiếm hàm V[y]. Trong mục này ta sẽ xem xét khía cạnh này của bài toán, bao gồm việc kiểm tra các điều kiện cấp hai. Chúng ta cũng sẽ thảo luận một điều kiện đủ dựa trên khái niệm tính lõm và tính lồi. Một kiểm định đơn giản nhưng hữu ích được gọi là điều kiện cần Legendre cho cực đại và cực tiểu cũng sẽ được giới thiệu dưới đây.

I. CÁC ĐIỀU KIỆN CẤP HAI

Bằng cách coi phiếm hàm V[y] như một hàm V(ε) và cho đạo hàm bậc nhất dV/dε bằng không, chúng ta đã rút ra phương trình Euler và những điều kiện hoành như những điều kiện cần cấp một đối với một đường cực trị. Để biết mỗi đường cực trị là cực đại hay cực tiểu , chúng ta có thể lấy đạo hàm cấp hai $d^2V/d\varepsilon^2$, và sử dụng những điều kiện cấp hai, các tiêu chuẩn sau đây trong tính toán:

Những điều kiện cần cấp hai:

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} \le 0 \qquad \text{(đối với cực đại V),}$$

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} \ge 0 \qquad \text{(đối với cực tiểu V).}$$

Những điều kiện đủ cấp hai:

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} < 0 \qquad \text{(đối với cực đại V),}$$

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} > 0 \qquad \text{(đối với cực tiểu V).}$$

1.1. Đạo hàm cấp hai của V

Để tìm $d^2v/d\varepsilon^2$, chúng ta lấy vi phân biểu thức $dV/d\varepsilon$ trong (2.8) theo ε, chú ý rằng

(1) tất cả các đạo hàm riêng của F(t,y,y'), cũng như chính hàm F, là các hàm số của t,y và y', và

(2) y và y', đến lượt nó, đều là hàm của ε, với các đạo hàm:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = p(t) \quad \text{và} \quad \frac{dy'}{d\varepsilon} = p'(t) \tag{2.86}$$

như vậy chúng ta có:

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dV}{d\varepsilon}\right) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_0^T [F_y p(t) + F_{y'} p'(t)]dt \\ &= \int_0^T [p(t)\frac{d}{d\varepsilon}F_y + p'(t)\frac{d}{d\varepsilon}F_{y'}]dt\end{aligned} \tag{2.87}$$

(theo quy tắc Leibniz)

Từ:

$$\frac{d}{d\varepsilon}F_y = F_{yy}\frac{dy}{d\varepsilon} + F_{y'y}\frac{dy'}{d\varepsilon} = F_{yy}p(t) + F_{y'y}p'(t) \quad \text{(theo (2.86))}$$

và:

$$\frac{d}{d\varepsilon}F_{y'} = F_{yy'}p(t) + F_{y'y'}p'(t).$$

Đạo hàm cấp hai (2.87) trở thành (sau khi đơn giản hoá):

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} = \int_0^T [F_{yy}p^2(t) + 2F_{yy'}p(t)p'(t) + F_{y'y'}p'^2(t)]dt \tag{2.87'}$$

1.2. Kiểm định dạng toàn phương

Đạo hàm cấp hai trong (2.87') là một tích phân xác định với hàm lấy tích phân là dạng toàn phương. Tất nhiên, vì t trải ra trên khoảng [0,T], ta có, không chỉ một mà là một số vô hạn các dạng toàn phương trong tích phân này. Tuy nhiên, nếu có thể chứng minh được rằng dạng toàn phương đó - với F_{yy}, $F_{yy'}$ và $F_{y'y'}$ được lấy giá trị tại cực trị - là xác định âm với mọi t, thì $d^2V/d\varepsilon^2 < 0$, và cực trị cực đại V. Cũng vậy, tính xác định dương của dạng toàn phương với mọi t là điều kiện đủ đối với cực tiểu V. Ngay cả nếu chúng ta chỉ có thể thiết lập tính *nửa xác định* về dấu thì ít nhất chúng ta có thể đã kiểm tra các điều kiện cần cấp hai.

Tính lõm/lồi của hàm lấy tích phân F được sử dụng trong điều kiện đủ. Trong khi tính lõm/lồi bản thân nó không đòi hỏi tính khả vi, chắc chắn nếu hàm F có đạo hàm cấp hai liên tục, thì tính lõm/lồi của nó có thể được kiểm tra bằng tính nửa xác định về dấu của vi phân toàn phần cấp hai của F. Vì vậy việc kiểm tra dạng toàn phương rõ ràng đóng một vai trò trong phép tính biến phân (xem phụ lục).

II. ĐIỀU KIỆN ĐỦ VỀ TÍNH LÕM /LỒI

2.1. Định lý đủ với những bài toán điểm đầu mút cố định

Giống như trường hợp hàm mục tiêu lõm (lồi) trong bài toán tối ưu hoá tĩnh là đủ để xác định một cực trị là một cực đại (cực tiểu) tuyệt đối, ta có một định lý sau đây về điều kiện đủ trong phép tính biến phân:

> *Với bài toán điểm mút cố định (2.1) - (2.3), nếu hàm lấy tích phân F(t, y, y') là lõm theo các biến (y, y'), thì phương trình Euler là điều kiện đủ đối với một cực đại tuyệt đối của V[y]. Cũng vậy, nếu F(t,y,y') là lồi theo các biến (y, y'), thì phương trình Euler là điều kiện đủ đối với một cực tiểu tuyệt đối của V[y].*

Để ý rằng tính lõm/lồi theo (y,y') có nghĩa là tính lõm/lồi theo đồng thời hai biến y và y', chứ không phải chỉ theo một biến riêng rẽ.

Chúng ta sẽ chứng minh định lý này cho trường hợp hàm lõm. Chứng minh này dựa trên định nghĩa hàm lõm khả vi: Hàm F(t,y,y') là lõm theo (y,y') nếu và chỉ nếu với một cặp điểm phân biệt bất kỳ trong miền xác định của hàm số, (t,y*,y*') và (t,y,y'), ta có:

$$F(t,y,y') - F(t,y^*,y^{*\prime})$$
$$\leq F_y(t,y^*,y^{*\prime})(y-y^*) + F_{y'}(t,y^*,y^{*\prime})(y'-y^{*\prime})$$
$$= F_y(t,y^*,y^{*\prime})\varepsilon p(t) + F_{y'}(t,y^*,y^{*\prime})\varepsilon p'(t) \text{ (theo(2.5))} \quad (2.88)$$

Ở đây, $y^*(t)$ biểu thị đường đi tối ưu, và $y(t)$ biểu thị một đường đi bất kỳ khác. Tích phân cả hai vế (2.88) theo t trong khoảng [0,T], ta được:

$$V[y] - V[y^*] \leq \varepsilon \int_0^T [F_y(t,y^*,y^{*\prime})p(t) + F_{y'}(t,y^*,y^{*\prime})p'(t)]dt$$

$$= \varepsilon \int_0^T p(t)\left[F_y(t,y^*,y^{*\prime})p(t) - \frac{d}{dt}F_{y'}(t,y^*,y^{*\prime})\right]dt$$

(tích phân từng phần của số hạng $F_{y'}(t,y^*,y^{*\prime})p'(t)$ như trong (2.13))

$$= 0 \text{ (vì } y^*(t) \text{ thoả mãn phương trình Euler (2.15))} \quad (2.89)$$

Nói cách khác, $V[y] \leq V[y^*]$, với mỗi đường đi chấp nhận được $y(t)$. Như vậy, chúng ta đã nhận dạng $y^*(t)$ là một đường đi làm cực đại V, và đồng thời đã chứng minh được rằng phương trình Euler là một điều kiện đủ, với giả thiết hàm **F** lõm. Trường hợp ngược lại, hàm F lồi đối với cực tiểu V, chứng minh tương tự.

Chú ý rằng nếu hàm F là *lõm ngặt (chặt)* theo (y,y'), thì bất đẳng thức yếu ≤ trong (2.88) và (2.89) sẽ trở thành bất đẳng thức mạnh (chặt) <. Kết quả, $V[y] < V[y^*]$, khi đó $V[y^*]$ là một cực đại tuyệt đối *duy nhất* của V. Cũng vậy, một hàm F *lồi chặt* thì sẽ làm cho $V[y^*]$ là một cực tiểu tuyệt đối *duy nhất*.

2.2. Tổng quát hoá điểm cuối biến đổi

Ta đã chứng minh định lý về điều kiện đủ dựa trên giả thiết các điểm đầu mút cố định. Nhưng có thể dễ dàng khái quát hoá cho các bài toán với đường cuối thẳng đứng hoặc đường cuối thẳng đứng cụt.

Để thấy điều này, ta nhớ lại rằng quá trình lấy tích phân từng phần trong (2.13) đưa đến sự có mặt số hạng $[F_{y'}p(t)]_0^T$ mà sau đó biến mất vì với các điểm đầu mút cố định, đường cong xao động p(t) có đặc điểm là p(0) = p(T) = 0. Khi chuyển sang bài toán với một điểm cuối biến đổi, với T cố định còn y(T) tự do, p(T) lúc này không đòi hỏi bằng 0 nữa. Bởi lý do này, chúng ta phải nhận thêm một số hạng:

$$\varepsilon[F_{y'}p(t)]_{t=T} = [F_{y'}(y - y^*)]_{t=T} \quad \text{(theo (2.5))}$$

Sau khi sắp xếp lại, (2.89) trở thành:

$$V[y] \leq V[y^*] + [F_{y'}(y-y^*)]_{t=T}$$

ở đây, $F_{y'}$ sẽ được lấy giá trị dọc theo đường đi tối ưu, và (y-y*) biểu thị độ chệch của đường đi y(t) bất kỳ chấp nhận được nào ở lân cận so với đường đi tối ưu y*(t).

Nếu số hạng cuối cùng trong bất đẳng thức cuối cùng bằng 0, thì rõ ràng kết luận ban đầu – rằng V[y*] là một cực đại tuyệt đối – vẫn đúng. Hơn nữa, nếu số hạng đó âm, chúng ta càng chắc chắn rằng V[y*] là một cực đại tuyệt đối. Chỉ khi $[F_{y'}(y - y^*)]_{t=T}$ dương thì chúng ta không dám chắc. Nói tóm lại, trong trường hợp hiện tại, ngoài điều kiện về tính lõm đối với F(t, y, y') trong điều kiện đủ chỉ cần thêm điều kiện nữa là biểu thức $[F_{y'}(y - y^*)]_{t=T}$ không dương.

Điều kiện thêm này sẽ tự động được thoả mãn khi điều kiện hoành được thoả mãn đối với bài toán đường cuối thẳng đứng, tức là $[F_{y'}]_{t=T} = 0$. Trường hợp đường cuối thẳng đứng cụt, điều kiện hoành cũng cho $[F_{y'}]_{t=T} = 0$ (khi khi $y^* > y_{min}$), hoặc bài toán được đưa về trường hợp đầu mút cuối cố định, tức $y^* = y_{min}$ tại t = T (khi $y^* = y_{min}$). Bằng cách nào thì điều kiện bổ sung cũng được đáp ứng. Do đó, nếu hàm lấy tích phân F là lõm (lồi) theo các biến (y,y') trong một bài toán với đường cuối thẳng đứng hoặc đường cuối thẳng đứng cụt, thì phương trình Euler cộng với điều kiện hoành là điều kiện đủ đối với một cực đại (cực tiểu) tuyệt đối của V[y].

2.3. Kiểm tra tính lõm/lồi

Với hàm f bất kỳ, dù có khả vi hay không, thì tính lõm vẫn có thể được kiểm tra bằng định nghĩa như sau: với hai điểm phân biệt u và v trong miền đang xét, và với $0 < \theta < 1$, F là lõm nếu và chỉ nếu:

$$\theta F(u) + (1 - \theta)F(v) \leq F[\theta u + (1 - \theta)v]$$

Với trường hợp lồi, dấu ≤ chuyển thành ≥. Tuy nhiên việc kiểm tra tính chất này rất rắc rối và dài dòng. Với mục đích của chúng ta, vì F(t,y,y') đã được giả sử là có đạo hàm cấp hai liên tục, nên chúng ta có cách đơn giản

hơn để kiểm tra tính lồi , lõm dựa trên sự xác định hoặc nửa xác định dấu của dạng toàn phương:

$$q = F_{y'y'} dy'^2 + 2F_{yy'}dydy' + F_{y'y'} dy'^2 \quad (2.90)$$

Hoặc:

$$q = F_{y'y'}dy'^2 + 2F_{yy'}dy'dy + F_{yy}dy^2 \quad (2.90')$$

Một khi dấu của dạng toàn phương được khẳng định, chúng ta có thể dễ dàng rút ra kết luận về tính lõm / lồi như sau: Hàm F(t,y, y') là lõm (lồi) theo (y, y') nếu và chỉ nếu dạng toàn phương q nửa xác định âm (dương) khắp mọi nơi; và hàm F là lõm hẳn (chặt) (lồi hẳn (chặt)) nếu (nhưng không chỉ nếu) q luôn xác định âm (dương).

Cần lưu ý rằng, khái niệm tính lõm /lồi là một khái niệm toàn cục. Đây là lý do tại sao nó liên quan tới cực trị tuyệt đối, và cũng là lý do tại sao dạng toàn phương q đòi hỏi nửa xác định âm (dương) khắp mọi nơi với hàm F lõm (lồi), có nghĩa là sự nửa xác định dấu của q đúng với mọi điểm trong miền đang xét (trong không gian yy') với mọi t. Đây là một điều kiện mạnh hơn tiêu chuẩn dạng toàn phương đã được để cập liên quan tới (2.87'), bởi vì trong tiêu chuẩn đó, đạo hàm cấp hai của F chỉ lấy giá trị tại cực trị. Tuy nhiên, nhìn ở góc độ khác, tính lõm / lồi là điều kiện đủ yếu hơn; nó chỉ cần tính nửa xác định dấu, trong khi, với (2.87'), một điều kiện đủ đòi hỏi một dấu xác định.

Sự xác định và nửa xác định dấu của một dạng toàn phương có thể được kiểm tra với những kiểm định bằng định thức và nghiệm đặc trưng (xem phụ lục). Bởi vì những kiểm định này không những có thể áp dụng được trong phạm vi phép tính biến phân hiện tại mà còn có thể áp dụng được trong lý thuyết điều khiển tối ưu về sau.

III. ĐIỀU KIỆN CẦN LEGENDRE

Nét đặc trưng lõm mô tả trong (2.88) là một khái niệm *toàn cục*. Khi nét đặc trưng đó có mặt trong hàm lấy tích phân F, thì cực trị được bảo đảm làm cực đại V[y]. Nhưng khi F không lõm toàn cục, như có thể thường xảy ra (chẳng hạn trong bài toán độc quyền động), ta phải tìm một số điều kiện yếu hơn. Điều này cũng đúng đối với tính lồi. Trong mục này, ta giới thiệu một điều kiện cần cấp hai được gọi là *điều kiện Legendre*, dựa trên

tính lõm/lồi địa phương. Mặc dù không mạnh như điều kiện đủ, nó rất hữu ích và thực sự được sử dụng thường xuyên.

3.1. Điều kiện Legendre

3.1.1. Điều kiện

Điều kiện Legendre mang ý nghĩa lớn ở tính cực kỳ đơn giản của nó, vì nó không đòi hỏi gì ngoài dấu của $F_{y'y'}$. Nhà toán học Legendre, có lúc nghĩ rằng ông đã khám phá ra một điều kiện đủ khá tinh xảo: $F_{y'y'} < 0$ đối với cực đại hoá V và $F_{y'y'} > 0$ đối với cực tiểu hoá V. Nhưng ông đã lầm. Tuy nhiên, dạng bất đẳng thức yếu của điều kiện này quả thực đúng là một điều kiện cần:

$$\text{Cực đại } V[y] \Rightarrow F_{y'y'} \le 0 \text{ đối với mọi } t \in [0,T]$$

$$\text{Cực tiểu } V[y] \Rightarrow F_{y'y'} \ge 0 \text{ đối với mọi } t \in [0,T] \quad (2.91)$$

(điều kiện cần Legendre)

Đạo hàm $F_{y'y'}$ được lấy giá trị tại đường cực trị.

Lý giải:

Để hiểu lý lẽ đằng sau (2.91), đầu tiên ta biến đổi số hạng ở giữa trong hàm lấy tích phân của (2.87') thành một số hạng bình phương bằng cách lấy tích phân từng phần. Đặt $v \equiv F_{y'y'}$ và $u \equiv p^2(t)$, thì:

$$dv = \frac{dF_{y'y'}}{dt}dt \quad \text{và} \qquad du = 2p(t)p'(t)dt$$

Do đó số hạng giữa trong (2.87') có thể được viết lại là:

$$\int_0^T v\,du = uv\Big|_0^T - \int_0^T u\,dv$$

$$= F_{yy'}p^2(t)\Big|_0^T - \int_0^T p^2(t)\frac{dF_{yy'}}{dt}dt$$

$$= 0 - \int_0^T p^2(t)\frac{dF_{yy'}}{dt}dt \quad (\text{giả sử } p(0) = p(T) = 0) \qquad (2.92)$$

Thay biểu thức này vào (2.87') ta được:

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} = \int_0^T\left[\left(F_{yy} - \frac{dF_{yy'}}{dt}\right)p^2(t) + F_{y'y'}p'^2(t)\right]dt \qquad (2.93)$$

Hàm lấy tích phân bây giờ chứa hai số hạng bình phương $p^2(t)$ và $p'^2(t)$.

Nếu đường cực trị là cực đại thì phải có $\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} \le 0$ với mọi đường p(t), ta suy ra rằng phải có $F_{y'y'} \le 0$ trên [0, T]. Thực vậy , giả sử $F_{y'y'} > 0$ trên khoảng $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ trong [0, T], ta có thể xây dựng đường xao động p(t) đặc biệt sao cho p(t) > 0 với $t \in(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ và p(t) = 0 với $t \notin (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, chẳng hạn $p(t) = (t - \varepsilon_1)(t - \varepsilon_2)e^{ct}$,với c là số khá lớn. Khi đó , do đạo hàm $p'^2(t)$ lớn hơn nhiều so với $p^2(t)$, biểu thức dưới dấu tích phân trong (2.93) sẽ là dương trên$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, và ta sẽ phải có $\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} > 0$. Vậy phải có $F_{y'y'} \le 0$ và nó đúng là điều kiện cần của đường cực trị.

Lưu ý rằng, để đạt tới kết quả trong (2.93), ta đã giả định rằng p(0) = p(T) = 0 trên đường cong xao động. Điều gì sẽ xảy ra nếu điểm cuối biến đổi và p(T) không đòi hỏi bằng 0? Câu trả lời là số hạng 0 trong dòng cuối cùng của (2.92) khi đó sẽ được thay bằng biểu thức mới $[F_{yy'}p^2(t)]_{t=T}$. Nhưng với cách chọn hàm xao động đặc biệt có p(T) = 0 trong chứng minh cho trường hợp đầu mút cố định thì biểu thức $(F_{yy'}p^2(t)) = 0$, do đó chứng minh cho trường hợp điểm cuối biến đổi.

Vậy, điều kiện cần Legendre là đúng dù điểm cuối là cố định hay biến đổi.

3.1.2. Các thí dụ

Thí dụ 1: Trong bài toán khoảng cách ngắn nhất (thí dụ 1 ở phụ lục A, ta đã thấy rằng:

$$F_{y'y'} = \left(1 + y'^2\right)^{-3/2} > 0$$

Như vậy, theo (2.91), điều kiện cần Legendre đối với một cực tiểu thoả mãn. Điều này đúng như kỳ vọng, vì bài toán đó trước đây đã được chỉ ra là thoả mãn điều kiện đủ cấp hai đối với cực tiểu.

Thí dụ 2: Đối với bài toán độc quyền động, chúng ta đã thấy rằng hàm lấy tích phân π(P, P') là không lõm, nên không thoả mãn điều kiện đủ. Tuy nhiên, vì:

$$\pi_{pp'} = -2ah^2 < 0$$

Điều kiện cần Legendre đối với một cực đại thực sự thoả mãn.

3.2. Điều kiện Legendre cho trường hợp n biến

Điều kiện cần Legendre, với cải biên thích hợp, cũng có thể áp dụng cho bài toán với n biến trạng thái $(y_1,...,y_n)$. Nhưng thay vì kiểm tra $F_{y'y'} \le 0$ hoặc $F_{y'y'} \ge 0$, bây giờ ta phải kiểm tra ma trận $[F_{y_i'y_j'}]$ cấp nxn – hoặc nói một cách khác, dạng toàn phương mà các hệ số của nó là $F_{y_i'y_j'}$ - là nửa xác định âm (đối với cực đại V) hoặc nửa xác định dương (đối với cực tiểu V). Với mục đích đó, đầu tiên hãy định nghĩa:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & \cdots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_n'y_1'} & \cdots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \tag{2.94}$$

ở đây các đạo hàm cấp hai được lấy giá trị theo các cực trị. Sau đó, viết tất cả các định thức con chính cấp 1x1 là Δ_1 , tất cả các định thức con chính cấp 2x2 là Δ_2 , ... Điều kiện cần cấp hai Legendre là:

$$\text{Cực đại V} \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 \le 0, \quad \Delta_2 \ge 0, \ \ldots\ , \ (-1)^n \Delta_n \ge 0$$

$$\text{với mọi } t \in [0,T] \tag{2.95}$$

$$\text{Cực tiểu V} \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 \ge 0, \quad \Delta_2 \ge 0, \ \ldots\ , \ \Delta_n \ge 0$$

$$\text{với mọi } t \in [0,T]$$

(điều kiện cần Legendre)

Lưu ý rằng điều kiện Legendre trong (2.95), mặc dù bề ngoài giống như kiểm định định thức đối với tính nửa xác định dấu, nhưng nó khác ở hai khía cạnh căn bản. Thứ nhất, kiểm định tính nửa xác định dấu liên quan với các đạo hàm loại F_{yy} và $F_{yy'}$ cũng như $F_{y'y'}$, nhưng điều kiện Legendre chỉ dựa trên đạo hàm loại $F_{y'y'}$. Đó là lý do ta sử dụng ký hiệu Δ trong (2.94) và (2.95), để phân biệt nó với ký hiệu D thường sử dụng cho kiểm định điều kiện đủ. Thứ hai, không giống như tính chất lõm/lồi toàn cục, điều kiện Legendre về bản chất là cục bộ; do đó, các đạo hàm cấp hai trong (2.94) chỉ được lấy giá trị theo cực trị.

Thí dụ 3: Kiểm tra điều kiện cần Legendre cho bài toán sau:

$$V[y,z] = \int_a^b (y'^2 + z'^2 + y'z')dt$$

Có hai biến trạng thái trong hàm lấy tích phân và $F = y'^2 + z'^2 + y'z'$

Vì: $F_{y'} = 2y' + z'$ và $F_{z'} = 2z' + y'$

ta thấy rằng:

$$F_{y'y'} = 2 \quad F_{y'z'} = F_{z'y'} = 1 \qquad F_{z'z'} = 2$$

Thế các biểu thức này vào (2.94) cho ta $|\Delta| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Trong trường hợp này ta thấy rằng:

$$|\overline{\Delta}_1| = 2 \qquad \text{và} \qquad |\overline{\Delta}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Như vậy, theo (2.95), điều kiện Legendre đối với một cực tiểu thoả mãn.

IV. CÁC BIẾN PHÂN CẤP MỘT VÀ CẤP HAI

Thảo luận của ta về các điều kiện cấp một và cấp hai cho đến nay dựa trên khái niệm đạo hàm cấp một $dV/d\varepsilon$ và đạo hàm cấp hai $d^2V/d^2\varepsilon$. Có cách khác để xem xét bài toán tập trung quanh các khái niệm biến phân cấp một và biến phân cấp hai gắn trực tiếp với chính tên gọi *phép tính biến phân*.

Phép tính biến phân bao hàm một sự so sánh các giá trị đường đi $V[y]$ và $V[y^*]$. Độ lệch của $V[y]$ so với $V[y^*]$ là:

$$\Delta V \equiv V[y] - V[y^*] = \int_0^T F(t,y,y')\,dt - \int_0^T F(t,y^*,y^{*\prime})\,dt \qquad (2.96)$$

Khi hàm dưới dấu tích phân của tích phân thứ nhất được khai triển thành chuỗi Taylor xung quanh điểm $(t,y^*,y^{*\prime})$, nó chứa số hạng $F(t,y^*,y^{*\prime})$ và cho phép ta bỏ tích phân thứ hai trong (2.96). Chuỗi Taylor đó là:

$$F(t,y,y') = F(t,y^*,y^{*\prime}) + [F_t(t-t) + F_y(y-y^*) + F_{y'}(y'-y^{*\prime})$$

$$+ \frac{1}{2!}[F_{tt}(t-t)^2 + F_{yy}(y-y^*)^2 + F_{y'y'}(y'-y^{*\prime})^2$$

$$+ 2F_{ty}(t-t)(y-y^*) + 2F_{ty'}(t-t)(y'-y^{*\prime})$$

$$+ 2F_{yy'}(y-y^*)(y'-y^{*\prime})] + \ldots + R_n \qquad (2.97)$$

ở đây, tất cả các đạo hàm riêng của F được lấy giá trị tại $(t;y^*,y^{*\prime})$, R_n là phần dư. Để có biểu diễn đầy đủ, ta đã đưa vào (t - t), nhưng tất nhiên, tất cả các đại lượng này triệt tiêu. Nhớ lại (2.5), ta có thể thay $y-y^* = \varepsilon p$, và $y'-y^{*\prime} = \varepsilon p'$ và thu được:

$$F(t,y,y') = F(t,y^*,y^{*\prime}) + F_y\varepsilon p + F_{y'}\varepsilon p'$$

$$+\frac{1}{2!}[F_{yy}(\varepsilon p)^2 + F_{y'y'}(\varepsilon p')^2 + 2F_{yy'}(\varepsilon p)(\varepsilon p')]$$

$$+ \ldots + R_n \qquad (2.97')$$

Thay kết quả này vào (2.96), ta có thể biến đổi (2.96) thành:

$$\Delta V = \varepsilon\int_0^T (F_y p + F_{y'}p')\,dt$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T (F_{yy}p^2 + F_{y'y'}p'^2 + 2F_{yy'}pp')\,dt$$

$$+ \text{ (các số hạng bậc cao hơn)} \qquad (2.98)$$

Trong lý thuyết về phép tính biến phân, tích phân thứ nhất trong (2.98) được gọi là biến phân cấp 1, ký hiệu là δV:

$$\delta V = \int_0^T (F_y p + F_{y'}p')\,dt = \frac{dV}{d\varepsilon} \quad \text{(theo (2.8))} \qquad (2.99)$$

Tương tự tích phân thứ hai trong (2.98) được gọi là biến phân cấp hai, ký hiệu kà $\delta^2 V$:

$$\delta^2 V = \int_0^T (F_{yy}p^2 + F_{y'y'}p'^2 + 2F_{yy'}pp')\,dt = \frac{d^2V}{d\varepsilon^2}$$

$$\text{(theo 2.87')} \qquad (2.100)$$

Đối với bài toán cực đại, điều kiện $\Delta V \le 0$, thì từ (2.98) rõ ràng rằng cần có $\delta V = 0$, vì ε có thể lấy dấu bất kỳ tại mọi điểm thời gian. Điều này tương đương với điều kiện cấp một $dV/d\varepsilon = 0$ mà trong thảo luận trước đây của ta đã dẫn tới phương trình Euler. Một khi điều kiện $\delta V = 0$ thoả mãn, cần thiết phải có thêm $\delta^2 V \le 0$, vì hệ số $\varepsilon^2/2$ là không âm tại mọi điểm thời

gian. Điều kiện này tương đương với $d^2V/d\varepsilon^2 \leq 0$, điều kiện cần cấp hai của Legendre.

Lý giải tương tự chỉ ra rằng, đối với một bài toán cực tiểu, cần có $\delta V = 0$ và $\delta^2 V \geq 0$. Nói tóm lại, các điều kiện cần cấp một và cấp hai có thể rút ra hoặc từ con đường đạo hàm hoặc từ con đường biến phân. Chúng ta đã chọn đi theo con đường đạo hàm bởi vì nó cho ta nắm bắt được một cách trực quan hơn quá trình lý giải đằng sau.

D. TẦM KẾ HOẠCH VÔ HẠN

Đối với một cá nhân, đặt kế hoạch cho một khoảng thời gian hữu hạn [0,T] nói chung là thích hợp, ngay cả người nhìn xa trông rộng nhất có lẽ cũng không đặt kế hoạch quá xa tuổi thọ mong đợi của mình. Nhưng đối với xã hội như một tổng thể, hoặc thậm chí với một công ty lớn, có đủ lý do để mong đợi hoặc giả định sự tồn tại của nó là lâu dài. Do đó có thể mong muốn mở rộng tầm kế hoạch của nó vô hạn về tương lai, và thay đổi khoảng lấy tích phân trong phiếm hàm mục tiêu từ [0, T] thành [0, ∞]. Sự mở rộng tầm nhìn như vậy có ưu điểm làm cho khuôn khổ tối ưu bao quát hơn. Tuy nhiên nó lại có nhược điểm do sự thoả hiệp với giả thiết là tất cả các giá trị tham số trong mô hình sẽ giữ không đổi suốt thời kỳ kế hoạch. Hơn nữa, tầm kế hoạch vô hạn đòi hỏi một vài sự phức tạp hơn về phương pháp luận.

I. NHỮNG VẤN ĐỀ PHƯƠNG PHÁP LUẬN VỀ TẦM THỜI GIAN VÔ HẠN

Tầm nhìn vô hạn đòi hỏi tháo gỡ ít nhất hai vấn đề phương pháp luận. Một là sự hội tụ của phiếm hàm mục tiêu, và hai là vấn đề các điều kiện hoành.

1.1. Sự hội tụ của phiếm hàm mục tiêu

Vấn đề hội tụ nảy sinh bởi vì phiếm hàm mục tiêu, bây giờ có dạng $\int_0^\infty F(t, y, y')dt$ (2.101), là một tích phân suy rộng, có thể có hoặc không có giá trị hữu hạn. Trong trường hợp tích phân này phân kỳ, có thể tồn tại nhiều hơn một đường đi y(t) mang lại một giá trị vô hạn của phiếm hàm mục tiêu và sẽ khó mà xác định đường đi nào trong số các đường đi này là tối ưu. Đúng là ngay cả trong tình huống phân kỳ, người ta đã đưa ra nhiều cách khác nhau để chọn một quỹ đạo đi tối ưu trong số tất cả các đường đi với giá

trị tích phân vô hạn. Nhưng đề tài này phức tạp, và ngoài ra, nó không liên quan với phép tính biến phân hiểu theo cách thông thường, nên chúng ta không đi sâu ở đây. Thay vào đó, như bước mở đầu bàn về các ứng dụng kinh tế trong phần sau, ta sẽ có một vài nhận xét về các điều kiện là (hay được cho là) đủ đối với tính chất hội tụ (chi tiết xem phần phụ lục). Tuy nhiên ta cũng nhắc lại điều kiện hội tụ của một số tích phân thường dùng:

- Cho tích phân phụ thuộc tham số $\int_0^\infty F(t,y,y')dt$ (2.102), nếu hàm lấy tích phân F là hữu hạn qua suốt khoảng lấy tích phân, và F đạt giá trị 0 tại một điểm hữu hạn nào đó, chẳng hạn t_0, và giữ bằng 0 đối với mọi $t > t_0$, thì tích phân (2.102) hội tụ.

- Trong tích phân $\int_0^\infty F(t,y,y')dt$, nếu hàm lấy tích phân có dạng $G(t, y, y')e^{-\rho t}$, trong đó ρ là hệ số chiết khấu dương, và G là hàm bị chặn, thì tích phân hội tụ.

Nét phân biệt của tích phân này là sự có mặt thừa số chiết khấu $e^{-\rho t}$ mà, với những nhân tố khác không đổi, nó cho một lực để hàm lấy tích phân giảm xuống 0 liên tục theo thời gian với một tốc độ đủ lớn. Khi thành phần G(t, y, y') của hàm lấy tích phân là dương (như trong hầu hết các ứng dụng kinh tế) và có một giới hạn trên, chẳng hạn $\bar{G}$, thì lực lái xuống $e^{-\rho t}$ là đủ để làm cho tích phân hội tụ. Nói một cách hình thức hơn, vì giá trị của hàm G không bao giờ có thể vượt quá giá trị của hằng số $\bar{G}$, ta có thể viết:

$$\int_0^\infty G(t,y,y')e^{-\rho t}dt \le \int_0^\infty \bar{G}e^{-\rho t}dt = \frac{\bar{G}}{\rho} \qquad (2.103)$$

1.2. Các điều kiện hoành

Các điều kiện hoành tham gia vào bức tranh khi hoặc thời gian cuối, hoặc trạng thái cuối, hoặc cả hai, biến đổi. Khi tầm kế hoạch là vô hạn, không có một giá trị T cuối cụ thể cho chúng ta bám vào nữa. Và trạng thái cuối cũng có thể được để ngỏ. Như vậy, cần có các điều kiện hoành.

Để phát triển các điều kiện hoành, ta có thể sử dụng cùng thủ tục như trong bài toán tầm hữu hạn. Về căn bản, các điều kiện này nổi lên một cách tự nhiên như sản phẩm của quá trình đi đến phương trình Euler, như

trong (2.59), bắt nguồn từ (2.57). Trong bối cảnh hiện tại, (2.59) phải được cải biên thành:

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_{t\to\infty}\Delta T + \left[F_{y'}\right]_{t\to\infty}\Delta y_T = 0 \qquad (2.104)$$

ở đây, từng số hạng phải triệt tiêu.

Vì trong bối cảnh hiện tại, không có T cố định nào, ΔT tất yếu khác 0, và điều này đòi hỏi điều kiện

$$\lim_{t\to\infty}(F - y'F_{y'}) = 0 \text{ (điều kiện hoành đối với tầm vô hạn)} \qquad (2.105)$$

Điều kiện này có cùng ý nghĩa kinh tế như điều kiện hoành (2.61) trong khuôn khổ tầm hữu hạn. Thí dụ, nếu bài toán liên quan đến một công ty muốn cực đại hoá lợi nhuận, điều kiện này đòi hỏi công ty đó tận dụng tất cả các cơ hội kiếm lợi nhuận.

Còn về số hạng thứ hai trong (2.104), nếu có một trạng thái cuối tiệm cận được chỉ định trong bài toán:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty = \text{một hằng số cho trước} \qquad (2.106)$$

Tương tự như trong trường hợp tầm vô hạn của y(T) = Z trong bài toán tầm hữu hạn, thì số hạng thứ hai trong (2.104) sẽ tự triệt tiêu ($\Delta y_T = 0$) và không cần điều kiện hoành nào. Nhưng nếu trạng thái cuối là tự do, thì ta phải đưa vào thêm điều kiện

$$\lim_{t\to\infty} F_{y'} = 0 \text{ (điều kiện hoành đối với trạng thái cuối tự do)} \qquad (2.107)$$

Có thể cho điều kiện này cùng ý nghĩa kinh tế như điều kiện hoành (2.60) đối với bài toán tầm hữu hạn. Nếu bài toán là bài toán của một công ty muốn cực đại lợi nhuận với biến trạng thái y biểu thị lượng vốn, (2.107) nói rằng công ty phải sử dụng hết vốn của nó khi $t \to \infty$.

Nói thêm rằng, nếu trạng thái cuối tự do chịu một ràng buộc như $y_\infty \ge y_{min}$, chúng ta luôn luôn có thể áp dụng (2.107) trước. Nếu nghiệm thoả mãn ràng buộc $y_\infty \ge y_{min}$ thì ta đã giải được bài toán. Nếu ngược lại ta phải sử dụng y_{min} như một trạng thái cuối cho trước.

Mặc dù các điều kiện hoành này về trực quan là hợp lý, sự đúng đắn của nó đôi khi còn để ngỏ.

Một cách thoát khỏi thế khó xử là tránh các điều kiện hoành và sử dụng lý luận kinh tế đơn giản để xác định trạng thái cuối phải là gì khi $t \to \infty$. Cách tiếp cận như vậy là đặc biệt khả thi trong các bài toán mà ở đó hàm lấy tích phân F hoặc không chứa đối số t dưới dạng hiển (bài toán được gọi là ôtônôm trong toán học) hoặc chỉ chứa đối số t trong thừa số chiết khấu $e^{-\rho t}$ (bài toán được gọi là ôtônôm trong kinh tế học). Trong bài toán loại này, thường có một trạng thái cuối ẩn y_∞ – một trạng thái ổn định – mà hệ thống bị hút về đó để thực hiện mục tiêu của bài toán. Nếu chúng ta có thể xác định y_∞, thì ta có thể đơn giản sử dụng điều kiện cuối (2.106) thay cho điều kiện hoành.

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG KINH TẾ CỦA BÀI TOÁN TẦM KẾ HOẠCH VÔ HẠN

2.1. Quỹ đạo đầu tư tối ưu cho một công ty

Tổng đầu tư của một công ty, I_g, có hai thành phần: đầu tư ròng nhằm mở rộng vốn sản xuất đầu tư phát triển, $I \equiv dK/dt$, và đầu tư thay thế nhằm bù đắp cho vốn bị hao mòn, giả thiết bằng δK, ở đây δ là hệ số hao mòn của vốn K. Vì cả hai thành phần của đầu tư gắn bó mật thiết với vốn, có thể hiểu được là việc xác định đường đi tối ưu của đầu tư, $I_g{}^*(t)$, tuỳ thuộc vào việc xác định quỹ đạo tối ưu của vốn, $K^*(t)$. Giả sử rằng các kế hoạch đầu tư là luôn luôn có thể thực hiện được, khi đã tìm được $K^*(t)$, đường đi tối ưu của đầu tư đơn giản là:

$$I_g{}^*(t) = K^{*\prime}(t) + \delta K^*(t) \tag{2.108}$$

Nhưng nếu vì một lý do nào đó tồn tại những trở ngại cho việc thực hiện kế hoạch đầu tư, thì phải sử dụng một số tiêu chuẩn khác để xác định $I_g{}^*(t)$ từ $K(t)$. Trong mục này, ta trình bày hai mô hình đầu tư minh hoạ cho cả hai tình huống này.

2.1.1. Mô hình Jorgenson

Xét mô hình Jorgenson về đầu tư đã trình bày ở chương I và đi đến việc công ty cực đại lượng giá trị ròng N của nó bằng việc chọn một đường đi K và L tối ưu, sao cho:

$$N[K,L] = \int_0^\infty [PQ(K,L) - WL - m(K'+\delta K)]e^{-\rho t}\,dt \tag{2.109}$$

Phiếm hàm mục tiêu trong (2.109) là một tích phân suy rộng. Sự có mặt thừa số chiết $e^{-\rho t}$ đảm bảo cho tích phân này hội tụ, nếu biểu thức doanh thu ròng trong ngoặc vuông không âm và bị chặn trên.

Có hai biến trạng thái K và L trong phiếm hàm mục tiêu; các ký hiệu khác để ký hiệu các tham số. Sẽ có hai phương trình Euler mang lại hai đường đi tối ưu, K*(t) và L*(t), và đường đi K*(t) sau đó có thể đưa đến đường đi I_g*(t). Ta có thể giả thiết công ty có vốn ban đầu đã cho, K_0, nhưng vốn cuối để ngỏ.

Vốn tối ưu

Trong việc áp dụng các phương trình Euler:

$$F_K - \frac{d}{dt}F_{K'} = 0 \qquad\qquad F_L - \frac{d}{dt}F_{L'} = 0$$

vào mô hình hiện tại, trước hết ta thấy rằng hàm dưới dấu tích phân trong (2.109) là tuyến tính theo cả K' và L'. (Số hạng L' vắng mặt; nghĩa là nó có hệ số 0). Như vậy, theo thảo luận trước đây, các phương trình Euler trở thành các phương trình đại số. Các đạo hàm riêng của hàm lấy tích phân là:

$$F_K = (PQ_K - m\delta)e^{-\rho t} \qquad F_{K'} = -me^{-\rho t}$$
$$F_L = (PQ_L - W)e^{-\rho t} \qquad F_{L'} = 0$$

Các phương trình Euler cho ta:

$$Q_K = \frac{m(\delta+\rho)}{P} \quad \text{và} \quad Q_L = \frac{W}{P} \quad \text{với mọi} \quad t \ge 0 \qquad (2.110)$$

Các điều kiện này nói rằng "sản phẩm hiện vật biên phải bằng chi phí thực tế biên về nguồn lực cần dùng". Số sản phẩm biên Q_K là kết quả của hoạt động sản xuất thu được khi chỉ dùng thêm một đơn vị vốn K và giữ số lao động L không thay đổi. Việc dùng một đơn vị vốn K đó phải chịu một lượng chi phí là m(δ + ρ), chi phí này gồm tiền khấu hao mδ và chi phí cơ hội mρ. Sử dụng một đơn vị khối lượng vốn đó khi xét đến sức mua của đồng tiền ta có số chi phí thực tế m(δ + ρ)/P. Ý nghĩa kinh tế của điều kiện đối với lao động L trong (2.110) cũng tương tự.

Lưu ý rằng điều kiện (2.110) cũng đúng là điều kiện chuẩn cho lời giải của bài toán tối ưu với cùng nội dung nhưng trên quan điểm phân tích tĩnh. Khác với phân tích động , trong phân tích tĩnh, người ta chỉ quan tâm đến

giá trị của các biến mà không xét giá trị đó có ở thời điểm nào hoặc phải bao lâu mới có được nó. Chính vì thế mà trong (2.110) điều kiện tối ưu phải được thoả mãn với mọi thời điểm t cho bài toán phân tích động,còn trong bài toán phân tích tĩnh thì điều kiện này không động chạm đến thời gian. Tuy nhiên Q_K và Q_L là những hàm số chỉ chứa các biến K và L, cho nên (2.110) là những phương trình đại số thông thường, nghiệm của chúng sẽ phải là những hằng số:

$$K^*(t) = k^*; \quad L^*(t) = l^*,$$

trong đó các hằng số k và l phụ thuộc các tham số của mô hình. Nếu cho trước bất kỳ những điều kiện ban đầu tại $t = t_0$

$$K(0) = k_0 \,;\, L(0) = l_0,$$

thì rõ ràng, nói chung:

$$Q(k_0, l_0) \neq Q(k^*, l^*) = Q^*.$$

Rốt cuộc, bài toán đầu tư như đã đặt ra, mặc dù được phân tích trên quan điểm động, đưa đến lời giải không khác gì kết quả phân tích tĩnh.

Thí dụ, khi lấy hàm sản xuất có dạng Cobb-Douglas $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$, $(\alpha + \beta = 1)$, ta có $Q_K = \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}$ và $Q_L = \beta K^{\alpha} L^{\beta-1}$. Thay các biểu thức này vào (2.110), ta thu được (sau khi khử L)

$$K^* = \left[\frac{m(\delta+\rho)}{\alpha P}\right]^{(\beta-1)/(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{W}{\beta P}\right)^{-\beta/(1-\alpha-\beta)} = \text{hằng số} \quad (2.111)$$

Gia tốc linh hoạt (mềm)

Vấn đề điều chỉnh đặt ra khi $K_0 \neq K^*$, chẳng hạn $K_0 < K^*$. Nếu tăng đột ngột trong biến trạng thái từ K_0 lên K^* sẽ không khả thi, một khả năng khác là biến đổi từ từ lên K^*. Jorgenson chấp nhận cái được gọi là cơ chế gia tốc linh hoạt để điều chỉnh từ từ trong đầu tư ròng nhằm loại bỏ một cách hệ thống khoảng cách giữa vốn mục tiêu K và vốn K(t) đang có tại thời gian t:

$$I(t) = j\left[K - K(t)\right] \qquad (0<j<1) \qquad (2.112)$$

Vốn mục tiêu K có thể là một hàm theo t cho trước trong hệ thức tổng quát của Jorgenson; ở đây ta xét $K = K^*$.

Cách điều chỉnh vốn từ từ có thể giúp cho công ty giảm bớt khó khăn gây ra bởi sự thay đổi vốn đột ngột và cả khối. Lúc đầu các nhà kinh tế nhìn nhận hệ thức (2.112) chỉ như một cách thuận tiện, nhưng Eisner và Strotz đã giải thích nó về mặt lý thuyết.

2.1.2 Mô hình Eisner-Strotz

Xét mô hình Eisner - Strotz đã trình bày ở chương I và ta đi đến bài toán sau:

Công ty chọn một đường đi $K^*(t)$ làm cực đại tổng giá trị hiện tại của lợi nhuận ròng:

$$\text{Cực đại} \qquad \Pi[K] = \int_0^\infty [\pi(K) - C(K')]e^{-\rho t}\,dt \qquad (2.113)$$

Với ràng buộc $K(0) = K_0$ (K_0 cho trước)

Phiếm hàm này lại là một tích phân suy rộng, nhưng vì hy vọng rằng lãi ròng không âm bị chặn trên, nên sự hội tụ của nó không là vấn đề. Lưu ý rằng, mặc dù ta đã chỉ định mức vốn ban đầu cố định, mức vốn cuối cùng còn để ngỏ, và bài toán này là ôtônôm kinh tế, tức là biểu thức trong ngoặc vuông vắng mặt biến t.

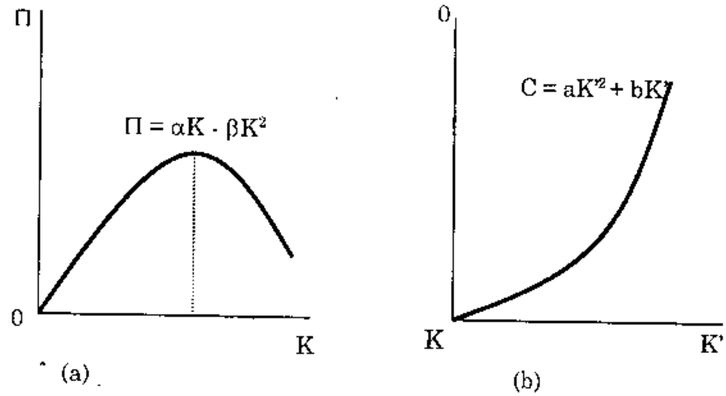
Trường hợp bậc hai

Có thể viết phương trình Euler cho hàm dưới dấu tích phân dạng tổng quát trong (2.113), nhưng, để có những kết quả cụ thể hơn, ta hãy giả sử rằng cả hai hàm π và C là bậc hai, như biểu diễn bằng đồ thị trong Hình 2.7.

$$\pi = \alpha K - \beta K^2 \qquad (\alpha, \beta > 0) \qquad (2.114)$$

$$C = aK'^2 + bK' \qquad (a, b > 0) \qquad (2.115)$$

Hàm lợi nhuận có một cực đại, đạt được tại $\bar{K} = \alpha/2\beta$. Đường cong C được vẽ chỉ trong góc phần tư thứ nhất, trong đó $K' > 0$, bởi vì ta đã giới hạn chú ý của chúng ta vào trường hợp mở rộng nhà máy. Đồng thời hai đường cong này phải cho một giới hạn trên đối với lãi ròng (π - C) để đảm bảo sự hội tụ của tích phân suy rộng trong (2.113).



Hình 2.7

Trong mô hình bậc hai này, ta có:

$$F = (\alpha K - \beta K^2 - aK'^2 - bK')e^{-\rho t}$$

với các đạo hàm:

$$F_K = (\alpha - 2\beta K)e^{-\rho t} \qquad F_{K'} = -(2aK' + b)e^{-\rho t}$$

$$F_{K'K'} = -2ae^{-\rho t} \qquad F_{KK'} = 0 \qquad F_{KK} = -2\beta e^{-\rho t} \qquad (2.116)$$

$$F_{tK'} = \rho(2aK' + b)e^{-\rho t}$$

Vậy, ta có phương trình Euler:

$$K'' - \rho K' - \frac{\beta}{a}K = \frac{b\rho - \alpha}{2a} \qquad (2.117)$$

với nghiệm tổng quát:

$$K^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \overline{K} \qquad (2.118)$$

ở đây: $$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + \frac{4\beta}{\alpha}}\right)$$

và: $\overline{K} = \dfrac{\alpha - b\rho}{2\beta}$ (nghiệm đặc biệt của phương trình vi phân (2.117))

Các nghiệm đặc trưng r_1 và r_2 đều là thực, vì biểu thức dưới dấu căn bậc hai là dương. Hơn nữa, vì bản thân căn bậc hai này lớn hơn ρ, suy ra rằng $r_1 > \rho > 0$ nhưng $r_2 < 0$. Còn nghiệm riêng $\overline{K}$, không chắc chắn về dấu

của nó. Tuy nhiên những lý do kinh tế mà ta sẽ xem xét dưới đây khẳng định rằng nó dương. Do đó, để bài toán có nghĩa, ta giả thiết rằng:

$$\alpha > b\rho \tag{2.119}$$

Nghiệm đặc biệt

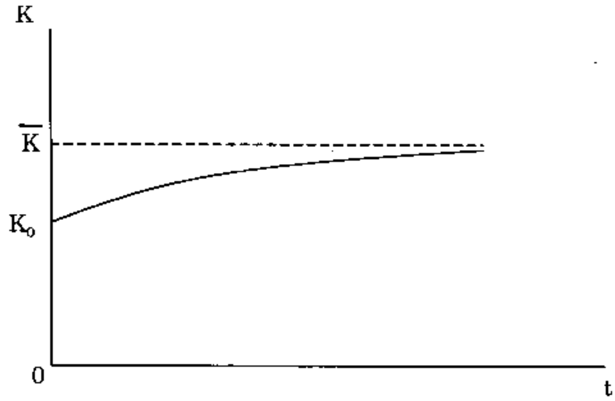
Để thu được nghiệm đặc biệt, trước hết ta sử dụng điều kiện đầu $K(0) = K_0$. Đặt $t = 0$ trong (2.118) cho phép ta viết:

$$K_0 = A_1 + A_2 + \overline{K} \tag{2.120}$$

Ta sẽ xét xem liệu có thể áp dụng được điều kiện cuối (2.106) hay không. Mặc dù trong mô hình không cho một trạng thái cuối dưới dạng hiển nào, bản chất ôtônôm của bài toán gợi ý rằng nó có một trạng thái cuối ẩn – quy mô nhà máy (vốn) cuối cùng mà công ty sẽ mở rộng tới. Như Hình 2.7a đã chỉ ra, lợi nhuận cao nhất đạt được ở quy mô $K = \alpha/2\beta$. Theo đó, ta không mong đợi công ty muốn mở rộng vượt quá quy mô này. Hơn nữa, khi xét đến chi phí C, công ty có thể chọn một quy mô cuối cùng thậm chí nhỏ hơn. Thực vậy, từ kiến thức của chúng ta về phương trình vi phân, nghiệm riêng $\overline{K}$ có thể là một lựa chọn hợp lôgíc đối với quy mô nhà máy cuối cùng K_∞. Tuy nhiên, đối chiếu với (2.118) ta thấy rằng, trong khi số hạng mũ thứ hai (trong đó $r_2 < 0$) tiến tới 0 khi $t \to \infty$, số hạng mũ thứ nhất (trong đó $r_1 > 0$) tiến tới $\pm\infty$ nếu $A_1 / 0$. Vì trên thực tế qui mô nhà máy không thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$, lối thoát duy nhất là đặt $A_1 = 0$. Gắn thông tin này với (2.120), ta có $A_2 = K_0 - \overline{K}$, do đó quỹ đạo K tối ưu là:

$$K^*(t) = (K_0 - \overline{K})e^{r_2 t} + \overline{K} \tag{2.121}$$

Có thể lưu ý vài điều về kết quả này. Thứ nhất, vì $r_2 < 0$, $K^*(t)$ hội tụ đến nghiệm riêng $\overline{K}$; như vậy $\overline{K}$ thực sự là quy mô nhà máy tối ưu cuối cùng K_∞. Hơn nữa, khi đã cho rằng b và ρ là dương, $\overline{K} = (\alpha - b\rho)/2\beta$ nhỏ hơn $\alpha/2\beta$. Như vậy, sau khi tính đến chi phí điều chỉnh, công ty quả thực dừng lại ở quy mô tối ưu nhỏ hơn quy mô làm cực đại lợi nhuận π chỉ ra trong Hình 2.7a. Cuối cùng, chênh lệch giữa quy mô đầu và cuối, $K_0 - \overline{K}$ giảm theo hàm mũ. Do đó đường đi $K^*(t)$ phải có hình dạng tổng quát minh hoạ trong Hình 2.8.



Hình 2.8

Các điều kiện hoành

Mặc dù ta có thể xác định các hằng số tuỳ ý mà không sử dụng các điều kiện hoành, cũng đáng quan tâm xem điều kiện hoành (2.105) sẽ dẫn ta tới đâu. Sử dụng thông tin trong (2.116) ta biết rằng:

$$F - K'F_{K'} = (\alpha K - \beta K^2 + aK'^2)e^{-\rho t} \tag{2.122}$$

Đối với các số hạng chứa K và K', ta sẽ sử dụng K* trong (2.118) và đạo hàm của nó, tức là:

$$K^* = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \overline{K}$$
$$K^{*\prime} = A_1r_1e^{r_1t} + A_2r_2e^{r_2t}$$

Thay các biểu thức này vào (2.122), ta thu được:

$$\begin{aligned} &F^* - K^{*\prime}F_{K^{*\prime}} \\ &= A_1(\alpha - 2\beta\overline{K})e^{(r_1-\rho)t} + A_1^2(ar_1^2 - \beta)e^{(2r_1-\rho)t} \\ &+ A_1A_2(2ar_1r_2 - 2\beta)e^{(r_1+r_2-\rho)t} + A_2(\alpha - 2\beta\overline{K})e^{(r_2-\rho)t} \\ &+ A_2^2(ar_2^2 - \beta)e^{(2r_2-\rho)t} + (\alpha\overline{K} - \beta\overline{K}^2)e^{-\rho t} \end{aligned} \tag{2.122'}$$

Điều kiện hoành là (2.122') triệt tiêu khi $t \to \infty$. Vì r_2 âm, ba số hạng cuối cùng không gây khó khăn gì. Nhưng hàm mũ trong số hạng thứ ba rút gọn về $e^0 = 1$, vì $r_1 + r_2 = \rho$, và số hạng đó sẽ không tiến tới 0. Xấu hơn, hai số hạng đầu bùng nổ vì $r_1 > \rho$. Để buộc ba số hạng đầu này trở thành 0, cách

duy nhất là đặt $A_1 = 0$. Như vậy, điều kiện hoành đưa ta tới đúng những gì ta đã đi đến từ nhận xét kinh tế.

Điều kiện hoành (2.107) không thực sự cần thiết trong bài toán này. Nhưng nếu ta thử áp dụng nó, nó cũng sẽ bảo chúng ta đặt $A_1 = 0$ để bỏ đi một biểu thức mũ bùng nổ.

Quỹ đạo đầu tư tối ưu với cơ chế gia tốc linh hoạt

Nếu hàm chi phí điều chỉnh C = C(K') tính đến đầy đủ những khó khăn bên trong và bên ngoài của việc điều chỉnh thì quỹ đạo đầu tư tối ưu đơn giản là đạo hàm của nghiệm xác định (2.121):

$$I^*(t) = K^{*\prime}(t) = r_2(K_0 - \overline{K})e^{r_2 t} \tag{2.123}$$

Nhưng từ (2.121) ta có:

$$(K_0 - \overline{K})e^{r_2 t} = K^*(t) - \overline{K}$$

Quỹ đạo đầu tư (2.123) có thể đơn giản hoá thành:

$$I^*(t) = -r_2[\overline{K} - K^*(t)] \tag{2.124}$$

Điều đáng chú ý về (2.124) là nó biểu thị chính xác cơ chế gia tốc linh hoạt trong (2.112). Chênh lệch giữa $\overline{K}$ (quy mô mục tiêu của nhà máy) và $K^*(t)$ (quy mô tối ưu tại thời điểm t của nhà máy), bị loại trừ một cách hệ thống thông qua hệ số dương $-r_2$. Chỉ còn một vấn đề chưa giải quyết là, trong cơ chế gia tốc linh hoạt, $-r_2$ phải nhỏ hơn 1. Đòi hỏi này thoả mãn nếu ta đặt ràng buộc bổ sung sau đây đối với mô hình:

$$\frac{\beta}{a} < 1 + \rho \tag{2.125}$$

Điều khiến cho cơ chế gia tốc linh hoạt trong (2.124) khác căn bản trong (2.112) là ở chỗ bây giờ không còn là một mẫu hành vi định trước nữa mà là một quy tắc tối ưu nổi lên từ thủ tục giải. Mô hình Eisner-Strotz, trong dạng bậc hai của nó, đã đóng góp căn cứ lý thuyết cho cơ chế gia tốc linh hoạt thường được sử dụng.

2.2. Hành vi tiết kiệm xã hội tối ưu

Ta xét lời giải của mô hình của Frank Ramsey được trình bày ở chương I. Từ đó ta đã đi đến mô hình sau:

2.2.1. Mô hình

$$\text{Cực tiểu} \qquad \int_0^\infty [B - U(C) + D(L)]dt \qquad (2.126')$$

$$\text{với ràng buộc } K(0) = K_0 \qquad (K_0 \text{ cho trước}). \ (2.126'')$$

2.2.2. Giải mô hình

Bài toán như phát biểu trong (2.126') có các biến trạng thái là K và L. Từ hàm lấy tích phân:

$$F = B - U(C) + D(L) \qquad \text{trong đó } C = Q(K,L) - K'$$

Lấy đạo hàm riêng theo L và L' ta được:

$$F_L = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial L} + D'(L) \equiv -MQ_L + D'(L) \ \ [M \equiv U'(C)]$$

$$F_{L'} = 0$$

Ở đây để đơn giản, ta sử dụng M để ký hiệu mức lợi ích biên. Giống như U(C), M là một hàm của C và vì vậy gián tiếp là hàm của K, L và K'. Tương tự đối với K, ta có thể thu được các đạo hàm:

$$F_K = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K} = -MQ_K,$$

$$F_{K'} = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K'} = -U'(C)(-1) = U'(C) = M$$

Các đạo hàm này giúp ta áp dụng các phương trình Euler (2.127).

Trước hết ta lưu ý rằng vì $F_{L'} = 0$, phương trình Euler đối với biến L,

$F_L - dF_{L'}/dt = 0$, rút gọn về $F_L = 0$, do đó

$$D'(L) = MQ_L \quad \text{với mọi } t \geq 0 \qquad (2.127)$$

Mức khó nhọc biên của lao động, tại mỗi thời điểm, phải đặt bằng tích của mức lợi ích biên của tiêu dùng nhân với số sản phẩm biên của lao động. Đối với K, phương trình Euler $F_K - dF_{K'}/dt = 0$ cho ta điều kiện $-MQ_K - dM/dt = 0$, hay:

$$\frac{dM/dt}{M} = -Q_K \qquad \text{với mọi } t \geq 0 \qquad (2.128)$$

Kết quả này cho một quy tắc về tiêu dùng: M, mức lợi ích biên của tiêu dùng, tại mọi thời điểm, phải có tốc độ tăng bằng giá trị âm sản phẩm biên của vốn. Theo quy tắc này, ta có thể vẽ đồ thị đường đi tối ưu đối với M. Khi đã tìm được đường đi tối ưu M, có thể sử dụng (2.127) để xác định đường đi tối ưu L. Tuy nhiên, như đã nói trên đây, bài toán suy biến theo L, nên chỉ riêng điều kiện ban đầu L(0) là không thích hợp.

2.2.3. Những quỹ đạo vốn và đầu tư tối ưu

Mối quan tâm lớn hơn đối với chúng ta là đường đi K tối ưu và đường đi đầu tư (và tiết kiệm) liên quan với nó là K'. Thay vì suy ra các đường đi này từ các kết quả trước, ta hãy tìm thông tin này bằng cách tận dụng sự kiện là bài toán hiện tại rơi vào Trường hợp đặc biệt II ở trên. Không có t như một đối số dưới dạng hiển trong hàm lấy tích phân, phương trình Euler đối với K, là $F - K'F_{K'}$ = hằng số, hay:

$$B - U(C) + D(L) - K'M = \text{hằng số} \quad \text{với mọi } t \geq 0 \qquad (2.129)$$

Ta lưu ý rằng hằng số này giữ nguyên với mọi t, kể cả $t \to \infty$. Mục tiêu kinh tế của mô hình là có U(C)-D(L) tiến tới mức hạnh phúc nhất. Điều đó có nghĩa là U phải tiến tới $\hat{U}$ và M phải tiến tới 0 khi t tiến ra vô cực. Vậy hằng số tuỳ ý trong (2.129) phải là 0. Nếu vậy, đường đi tối ưu của K' là:

$$K^{*\prime} = \frac{B - U(C) + D(L)}{M} \qquad (2.130)$$

hay, viết dưới dạng hiển của đối số thời gian:

$$K^{*\prime}(t) = \frac{B - U[C(t)]^{*} + D[L(t)]}{M(t)} \qquad (2.130')$$

Kết quả này được gọi là *quy tắc Ramsey*. Nó đòi hỏi rằng, để tối ưu, tốc độ tích luỹ vốn tại mỗi thời điểm phải bằng tỷ số khoảng cách từ mức lợi ích ròng đến mức hạnh phúc nhất chia cho mức lợi ích biên của tiêu dùng. Bề ngoài, quy tắc này độc lập hoàn toàn với hàm sản xuất. Và điều đó khiến Ramsey đến kết luận sai lầm rằng hàm sản xuất không gây ảnh hưởng tới việc xác định mức hạnh phúc nhất. Theo (2.128); M phải được chọn tối ưu khi đối chiếu với Q_K. Điều đó có nghĩa là mẫu số của (2.130') phụ thuộc chủ yếu vào hàm sản xuất với tư cách là sự biểu thị công nghệ sản xuất.

2.2.4. Xem xét các điều kiện hoành

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng điều kiện hoành tầm vô hạn cũng sẽ bắt buộc rằng hằng số trong (2.129) phải bằng 0. Khi điều kiện (2.105) áp dụng vào hai biến trạng thái trong bài toán hiện tại, nó đòi hỏi rằng

$$\lim_{t\to\infty}(F - L'F_{L'}) = 0 \qquad \text{và} \qquad \lim_{t\to\infty}(F - K'F_{K'}) = 0 .$$

Từ sự kiện là $F_{L'} = 0$, điều kiện thứ nhất trong các điều kiện này rút gọn thành điều kiện $F \to 0$ khi $t \to \infty$. Điều đó có nghĩa là mức lợi ích ròng U(C)-D(L) phải tiến tới mức hạnh phúc nhất. Lưu ý rằng bản thân điều kiện này vẫn để lại hằng số trong (2.129) chưa chắc chắn. Tuy nhiên, điều kiện kia sẽ cố định hằng số này tại 0 bởi vì $F - K'F_{K'}$ không là cái gì khác ngoài biểu thức vế trái trong (2.129).

Bài toán hiện tại ngầm chỉ định trạng thái cuối là mức hạnh phúc nhất. Do đó, không cần điều kiện hoành (2.107).

Từ quy tắc Ramsey, có thể đi xa thêm một bước để tìm đường đi $K^*(t)$ bằng cách lấy tích phân (2.130'). Tuy nhiên, để làm việc đó, ta cần các dạng cụ thể của các hàm U(C) và D(L). Lời giải tổng quát của (2.130') sẽ chứa một hằng số tuỳ ý mà nó có thể được xác định bởi điều kiện đầu $K(0) = K_0$. Và điều đó hoàn tất việc giải mô hình. Ta sẽ không cố gắng minh hoạ mô hình bằng những hàm cụ thể; nhưng sẽ chỉ ra cách phân tích đồ thị pha đối với nó ở mục sau.

III. PHÂN TÍCH ĐỒ THỊ PHA

Trong các mô hình tối ưu động, các đồ thị pha hai biến được sử dụng phổ biến để thu được các kết quả phân tích định tính. Điều này đặc biệt đúng khi trong mô hình sử dụng các hàm tổng quát, và tầm thời gian vô hạn. Đối với một bài toán phép tính biến phân với một biến trạng thái đơn, phương trình Euler là một phương trình vi phân cấp hai. Nhưng chuyển đổi phương trình đó thành một hệ hai phương trình cấp một đồng thời theo hai biến thường là một vấn đề đơn giản. Khi đó đồ thị pha hai biến có thể áp dụng vào bài toán này một cách không khó khăn. Trong mục này ta sẽ minh hoạ kỹ thuật với mô hình Eisner-Strotz và mô hình Ramsey. Sau đó ta sẽ áp dụng đồ thị pha vào trường hợp tầm hữu hạn.

3.1. Đồ thị pha của mô hình Eisner-Strotz

Trong mô hình về đầu tư tối ưu của một nhà máy, Eisner và Strotz giả thiết các hàm lợi nhuận π và chi phí điều chỉnh là các hàm bậc hai:

$$\pi = \alpha K - \beta K^2 \qquad (\alpha, \beta > 0) \qquad [\text{từ } (2.114)]$$

$$C = aK'^2 + bK' \qquad (a, b > 0) \qquad [\text{từ } (2.115)]$$

Từ phương trình Euler:

$$K'' - \rho K' - \frac{\beta}{a} K = \frac{b\rho - \alpha}{2a} \qquad (\text{từ } (2.117)) \qquad (2.131)$$

(ρ là hệ số chiết khấu dương),

rút ra lời giải định lượng là:

$$K^*(t) = (K_0 - K)e^{-r_2 t} + K \quad (r_2 < 0)\ (\text{từ } (2.121)) \qquad (2.132)$$

trong đó: $K = \dfrac{\alpha - b\rho}{2\beta}$

Chúng ta thấy rằng vốn K (quy mô nhà máy) phải tiến dần một cách tối ưu tới giá trị mục tiêu K theo một quỹ đạo ổn định làm giảm theo hàm mũ sự chênh lệch giữa giá trị đầu và giá trị mục tiêu của K.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra phương trình Euler có thể phân tích nhờ đồ thị pha như thế nào. Ta bắt đầu bằng việc đưa vào một biến I (đầu tư ròng):

$$I(t) = K'(t) \qquad (\text{kéo theo } I'(t) = K''(t)) \qquad (2.133)$$

Nó tạo điều kiện cho chúng ta viết lại phương trình Euler (2.131) như một hệ hai phương trình vi phân cấp một:

$$I' = \rho I + \frac{\beta}{a} K + \frac{b\rho - \alpha}{2a} \qquad (\text{nghĩa là } I' = f(I, K)) \qquad (2.134)$$

$$K' = I \qquad (\text{nghĩa là } K' = g(I, K)).$$

Đây là hệ thống đơn giản, vì cả hai hàm f và g là tuyến tính theo hai biến I và K, và trên thực tế K thậm chí vắng mặt trong hàm g.

3.1.1. Đồ thị pha

Giả sử I = I(t), K = K(t) là nghiệm của hệ phương trình (2.134). Với mỗi thời điểm t ta vẽ cặp giá trị (I, K) đó bằng một điểm trên mặt phẳng toạ độ IK gọi là không gian pha. Khi $t = t_0$, ta xem hệ thống đang nghiên cứu ở

chỗ được đặc trưng bởi điểm (I_0, K_0) ($I_0 = I(t_0)$; $K_0 = K(t_0)$) trong không gian pha. Khi thời gian trôi qua, tức là khi t thay đổi hệ thống có thể ở yên chỗ đó hoặc dời chỗ. Điểm trong không gian pha mà hệ thống ở yên đó khi thời gian trôi qua được gọi là điểm dừng hoặc được gọi là điểm hay trạng thái cân bằng (qua thời gian). Trường hợp ngược lại, hệ thống sẽ dời chỗ từ (I_0, K_0) được mô tả bởi một quỹ đạo đi qua điểm đó mà ta sẽ gọi là một luồng. Hướng của luồng cho bởi hướng của tiếp tuyến với nó tại điểm này. Hướng của tiếp tuyến với luồng được xác định bởi các đạo hàm (I'_0, K'_0), mỗi đạo hàm cho ta một thành phần của véc tơ tiếp tuyến. Dưới đây, ở Hình 2.9 ta dùng mũi tên để nêu lên hướng của từng thành phần tiếp tuyến tại mỗi điểm (I, K) mà luồng đi qua. Mũi tên hướng về đông biểu thị $I' > 0$, mũi tên hướng về tây biểu thị $I' < 0$. Tương tự, mũi tên hướng lên phía bắc $K' > 0$, hướng nam $K' < 0$. Hai mũi tên này giúp ta hình dung được hướng của luồng là véc tơ tổng của chúng.

Để vẽ đồ thị pha, trước hết ta hãy vẽ các đường $I' = 0$, và $K' = 0$ trên mặt phẳng toạ độ IK. Giao điểm của chúng sẽ cho ta điểm dừng của hệ thống.

Trong (2.134) đặt $I' = 0$ và giải đối với K ta được:

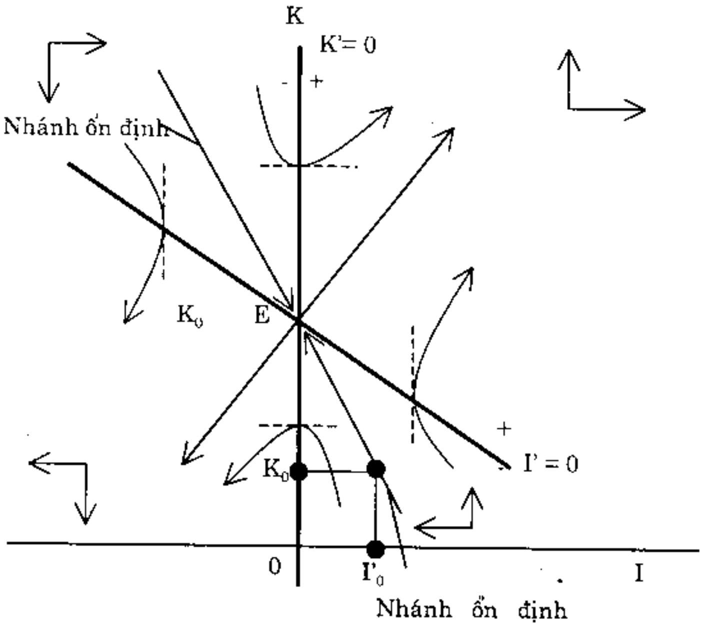
$$K = \frac{\alpha - b\rho}{2\beta} - \frac{a\rho}{\beta} I \text{ (phương trình đối với đường cong } I' = 0) \quad (2.135)$$

Tương tự, bằng cách đặt $K' = 0$, ta được:

$$I = 0 \quad \text{(phương trình đối với } K' = 0) \quad (2.136)$$

Cả hai phương trình này là những đường thẳng trong không gian pha, như chỉ ra trong Hình 2.9, với đường $I' = 0$ dốc xuống, và đường $K' = 0$ trùng với trục tung. Điểm cân bằng duy nhất của cả hệ thống được xác định bởi giao điểm của trục tung với đường $I' = 0$, mà theo (2.135) là $K = (\alpha - b\rho)/2\beta$, theo (2.119) $K > 0$. Ta mong đợi rằng điểm cân bằng này trùng với nghiệm riêng K (quy mô nhà máy mục tiêu) tìm được trong (2.118).

Theo định nghĩa, tất cả các điểm trên đường $I' = 0$ là dừng theo biến I. Do đó ta đã kẻ một cặp "đường khung" thẳng đứng trên đường này để chỉ ra rằng luồng qua nó phải theo hướng thẳng đứng. Tương tự, "các đường khung" nằm ngang được gắn cho đường $K' = 0$ để chỉ ra rằng luồng qua nó phải theo phương nằm ngang.



Hình 2.9

Mặt khác, các đường I' = 0, K' = 0 đóng vai trò là những đường ranh giới. Do tính liên tục của đạo hàm I' = dI/dt, đường I' = 0 sẽ chia mặt phẳng IK làm hai miền có I' < 0, và miền kia I' > 0. Đường K' = 0 cũng tương tự. Từ (2.134) ta thấyđạo hàm theo I là:

$$\frac{\partial I'}{\partial I} = \rho > 0 \qquad \text{và} \qquad \frac{\partial K'}{\partial I} = 1 > 0 \qquad (2.137)$$

Dấu dương của $\frac{\partial I'}{\partial I}$ nói lên rằng I' là hàm tăng, do đó khi I biến thiên theo chiều từ tây sang đông qua đường ranh giới I' = 0 thì nó phải từ miền có I' < 0 sang miền có I' > 0. Ta cũng có thể nhận xét như sau từ hệ phương trình (2.124), cho I = 0 và K = 0 ta thấy ở điểm gốc toạ độ thì I' = $\frac{\alpha - b\rho}{\alpha\beta} < 0$, vậy miền ở phía chứa gốc toạ độ, mà đường ranh giới I' = 0 chia ra, là miền có I' < 0. Để ký hiệu ta ghi dấu (-) ở bên trái đường I' = 0 và dấu (+) bên phải của nó trên Hình (2.9). Tương tự, đường K' = 0 chia mặt phẳng IK làm hai miền, do K' = I ta có K' < 0 ở miền bên trái đường K' = 0, và K' > 0 ở miền bên phải nó.

Theo những ràng buộc về hướng quy định bởi các đầu mũi tên vẽ trên mặt phẳng IK và các đường khung, ta có thể vẽ một họ các luồng, hay các quỹ đạo, để biểu diễn sự vận động của hệ thống từ bất kỳ một điểm ban đầu mà đã cho trước. Mỗi điểm phải ở trên một luồng nào đó, và phải có một số vô hạn các luồng. Nhưng thường chúng ta chỉ vẽ một số. Ta cần kiểm tra trên Hình 2.9 rằng các luồng này theo các mũi tên đối với IK, và nói riêng, chúng tương hợp với các đường khung buộc chúng đi qua đường $I' = 0$ với độ dốc vô hạn và đi qua đường $K' = 0$ với độ dốc 0.

3.1.2. Điểm cân bằng kiểu yên ngựa

Trạng thái cân bằng qua thời gian của hệ thống xảy ra tại điểm E là giao điểm của hai đường ranh giới. Theo cấu trúc của các luồng, ta thấy hai nhánh ổn định hướng tới E (một từ hướng đông nam và một từ hướng tây bắc), hai nhánh không ổn định (một hướng tới đông bắc và một hướng tới tây nam), và các luồng khác đầu tiên hướng tới E nhưng rồi đổi hướng ra xa nó. Trạng thái cân bằng như thế gọi là điểm cân bằng kiểu yên ngựa.

Rõ ràng rằng cách duy nhất để đạt tới mức mục tiêu tại E của đường vốn K(t) là đi được vào nhánh ổn định. Thí dụ, khi cho số vốn ban đầu K_0, bắt buộc ta phải chọn I^*_0 làm mức đầu tư ban đầu, vì chỉ lựa chọn đó mới đặt chúng ta lên "con đường lát gạch vàng" đi tới cân bằng. Tất nhiên một số vốn ban đầu khác cần có một I^*_0 khác. Sự ràng buộc lựa chọn I^*_0 như thế đại diện cho điều kiện hoành.

Trong tất cả các luồng, thoả mãn phương trình Euler , chỉ có luồng thoả mãn điều kiện đó mới đưa đến mục tiêu.

Khi đi trên nhánh ổn định hướng tây bắc trong Hình 2.9, ta thấy mức vốn K không ngừng tăng, kéo theo sự thu hẹp không ngừng khoảng chênh lệch giữa K_0 và mức vốn mục tiêu $\overline{K}$. Đây đúng là điều mà (2.132) nói cho chúng ta. Kèm theo sự tăng K là sự giảm mức đầu tư I. Lại một lần nữa, điều này phù hợp với nghiệm đã tìm được trước đây, vì bằng cách lấy vi phân (2.132) hai lần theo t, ta tìm được:

$$I^{*\prime}(t) = K^{*\prime\prime}(t) = r_2^2(K_0 - \overline{K})e^{r_2 t} < 0$$

và trong thí dụ hiện tại, $K_0 < \overline{K}$.

3.2. Đồ thị pha của mô hình Ramsey đơn giản

Để đơn giản cho việc phân tích mô hình Ramsey đã nêu, ta giả định rằng đầu vào lao động là hằng số, do đó rút gọn hàm sản xuất thành Q(K) và mô hình có dạng đơn giản là:

Cực đại $\int_0^{\infty} U(C)\, dt$,

với tiêu dùng $C = Q(K) - K'$,

đầu tư $I = K' = dK/dt$, U(C) là hàm lợi ích.

Viết phương trình Euler cho hàm dưới dấu tích phân $U[Q(K) - K']$, ta có:

$$U'(C)Q_K - dU'(C)/dt = 0.$$

Đặt $M = U'(C)$ phương trình này có dạng là:

$$-MQ_K - \frac{dM}{dt} = 0 \qquad \text{(từ (5.28))} \qquad (2.138)$$

hoặc biểu diễn dưới dạng hiển sự phụ thuộc của sản phẩm biên vào K,

$$-MQ'(K) - M' = 0 \qquad (2.138')$$

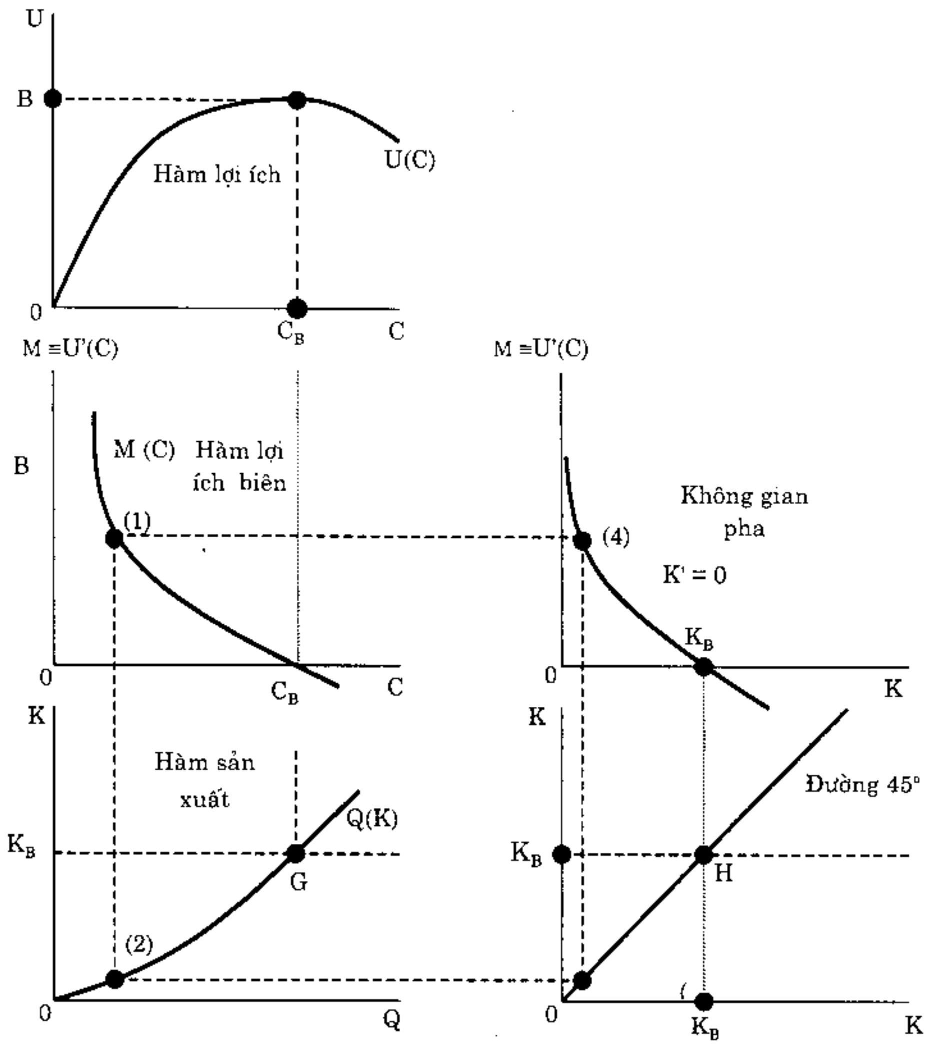
Viết dưới dạng (2.138'), ta có thể xem nó là phương trình chứa hai biến K và M. Để xác định hai biến ta cần một phương trình nữa. Muốn thế trước hết ta nhận xét $M = U'(C)$ là hàm lợi ích biên mà ta có thể giả thiết là hàm đơn điệu giảm theo C vì thế có hàm ngược $C = C(M)$. Ta đã giả thiết tiêu dùng $C = Q(K, L) - K'$, thay $C = C(M)$ ta có phương trình thứ hai cần tìm.

$$K' = Q(K) - C(M) \qquad (2.139)$$

Kết hợp (2.138') và (2.139), ta được hệ hai phương trình:

$$K' = Q(K) - C(M) \quad \text{(nghĩa là } K' = f(K, M)) \qquad (2.140)$$

$$M' = -MQ'(K) \quad \text{(nghĩa là } M' = g(K, M))$$



Hình 2.10

Trước khi tiếp tục, cần đặt một số ràng buộc định tính nhất định đối với hình dạng các hàm này. Giả thiết rằng hàm U(C) có dạng như trong đồ thị trên cùng của Hình 2.10, với B là mức lợi ích hạnh phúc nhất và C_B là mức tiêu dùng hạnh phúc tương ứng. Trạng thái bão hoà tiêu dùng xảy ra tại C_B, và những tiêu dùng thêm vượt quá mức đó dẫn đến sự giảm U. Từ hàm này, ta có thể rút ra hàm lợi ích biên M(C) cho bởi đồ thị ngay ở dưới, với $M = 0$ tại $C = C_B$. Vì M(C) là đơn điệu, tồn tại hàm ngược C(M), với

C'(M) < 0. Mặt khác, giả thiết Q(K) có dạng như đồ thị ở góc trái bên dưới, ở đây Q lấy giá trị trên trục hoành chứ không trên trục tung. Sản phẩm biên của vốn Q'(K) > 0 và Q"(K) < 0 với mọi K > 0.

3.2.1. Đồ thị pha

Để xây dựng đồ thị pha, ta vẽ các đường K' = 0 và M' = 0 trong không gian KM. Từ (2.140) đặt K' = 0, M' = 0 ta có:

$$Q(K) = C(M) \quad \text{(phương trình đối với đường cong } K' = 0) \qquad (2.141)$$

$$M = 0 \qquad \text{(phương trình đối với đường cong } M' = 0) \qquad (2.142)$$

Phương trình thứ hai được rút ra từ giả thiết Q'(K) ≠ 0.

Để vẽ đường K' = 0 trong không gian pha KM, ta có thể theo cách được nêu lên trong hình (2.105). Trước hết từ giá trị M ta đi đến điểm (1) trên đường M = M(C), theo chiều mũi tên đi xuống ta gặp đường Q = Q(K) ở điểm (2) mà đồ thị đã được vẽ sao cho Q(K) = C(M), do đó điểm (2) sẽ cho ta giá trị K thoả mãn phương trình. Điểm (3) giúp ta chuyển giá trị K này sang không gian pha. Cặp giá trị (K,M) tìm được sẽ cho ta điểm (4) trên đường K' = 0 trong không gian pha.

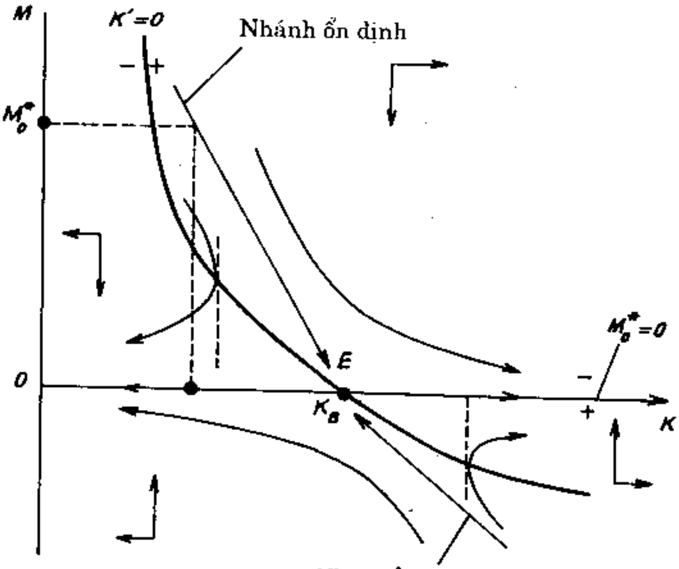
3.2.2. Điểm cân bằng kiểu yên ngựa

Bây giờ ta vẽ lại đường K' = 0 trong Hình 2.11, và thêm vào đó đường M' = 0, mà theo (2.142) nó phải trùng với trục K. Giao điểm của hai đường này là điểm cân bằng duy nhất E, đặc trưng bởi K = K_B và M = 0, và do đó tương ứng với mức tiêu dùng hạnh phúc nhất.

Đường khung đối với đường K' = 0 là thẳng đứng. Đường khung đối với đường M' = 0 là nằm ngang và nằm hoàn toàn dọc theo nó. Vì các đường khung trùng khít với đường M' = 0, đường M' = 0 sẽ không chỉ là ranh giới mà cũng là quỹ tích của một vài luồng.

Dãy dấu của K' và M' có thể được xác định từ các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial K'}{\partial K} = Q'(K) > 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial M'}{\partial M} = -Q'(K) < 0 \quad \text{(từ (2.140))} \qquad (2.143)$$



Hình 2.11

Các đạo hàm này mang lại dãy dấu (-, 0, +) theo hướng từ trái sang phải đối với K' và dãy dấu (+, 0, -) theo hướng từ dưới lên đối với M'. Do đó, các đầu mũi tên đối với K chỉ sang đông trong miền bên phải của đường K' = 0 và chỉ sang tây trong miền bên trái nó, còn các đầu mũi tên đối với M chỉ về phía nam trong miền phía trên đường M' = 0 và chỉ về phía bắc trong miền phía dưới nó.

Các luồng thu được lại sinh ra một điểm yên ngựa. Khi cho bất kỳ vốn ban đầu K_0, ta cần chọn mức lợi ích biên ban đầu M_0 sao cho hệ thống được đặt lên một trong các nhánh ổn định đưa đến điểm yên ngựa. Thí dụ, với $K_0 < K_B$, được chỉ ra trong Hình 2.11, trong đó chỉ có M^*_0, có thể đưa ta lên "con đường lát gạch vàng" dẫn tới E. Tất cả các luồng khác cuối cùng sẽ mang lại hoặc (1) tích luỹ vốn quá mức và không thể đạt được mức hạnh phúc nhất, hoặc (2) giảm tích luỹ vốn liên tục "ăn vào vốn" và lại không thể đạt được mức hạnh phúc nhất. Như trong mô hình Eisner-Strotz, ta có thể giải thích đòi hỏi phải chọn đúng giá trị đầu M như điều kiện tương đương với điều kiện hoành.

Cả mô hình Eisner-Strotz lẫn mô hình Ramsey đều đưa đến điểm cân bằng yên ngựa, đây không phải là sự trùng khớp ngẫu nhiên. Đòi hỏi phải đặt hệ thống vào nhánh đưa đến đường cân bằng là một quy tắc tối ưu hoá, cũng như một công ty muốn cực đại lợi nhuận, trong bài toán tối ưu hoá tĩnh đòi hỏi, phải chọn mức đầu ra của nó theo quy tắc MC = MR. Nếu điểm cân bằng của hệ là một nút ổn định hay một tiêu điểm ổn định giống như tình huống mà "mọi con đường đều dẫn tới Rome" thì sẽ không cần quy tắc lựa chọn bắt buộc nào nữa và bài toán tối ưu không đặt ra. Mặt khác, nếu cân bằng là một nút hay tiêu điểm không ổn định thì sẽ, không có con đường nào đưa đến mức mục tiêu của biến trạng thái.

IV. TẦM KẾ HOẠCH HỮU HẠN VÀ HÀNH VI ĐƯỜNG ĐẠI LỘ (KIỂU ĐƯỜNG LỚN)

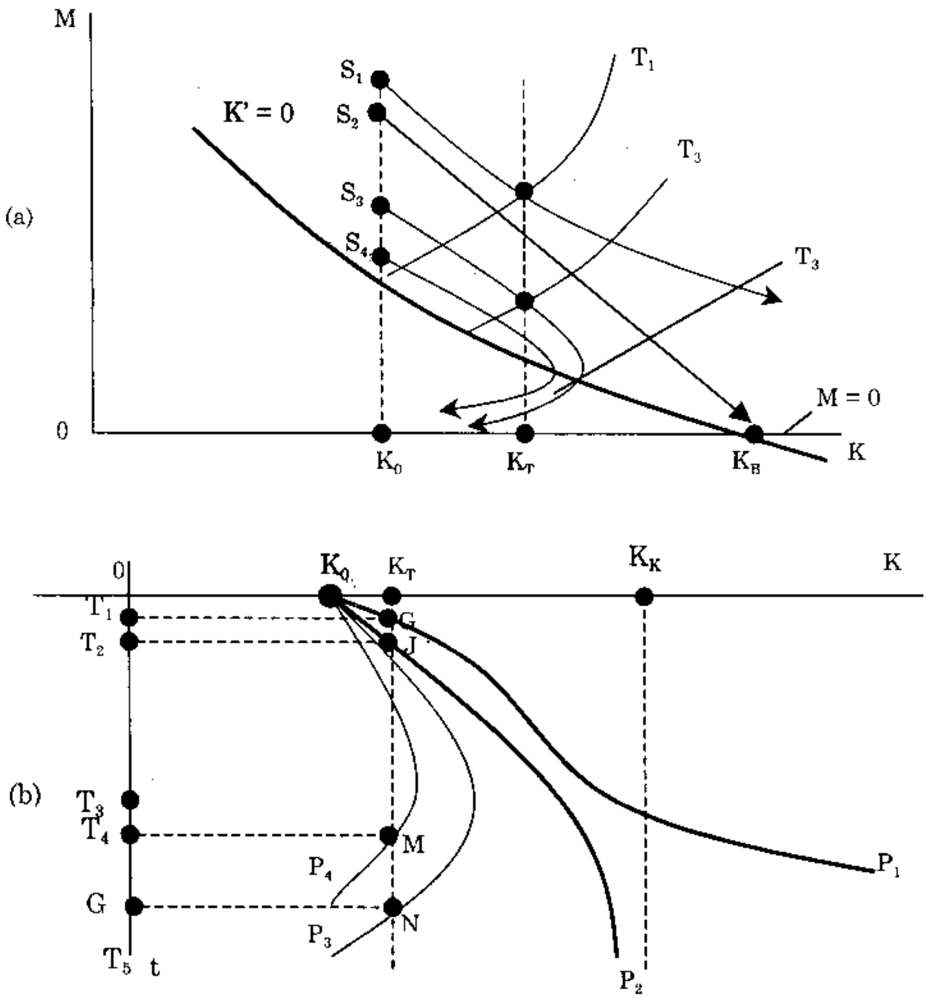
Mô hình Ramsey nhìn trước một tầm kế hoạch vô hạn. Nhưng còn đối với tầm kế hoạch hữu hạn, chẳng hạn 100 năm hoặc 200 năm thì sao? Có thể vẫn áp dụng được kỹ thuật đồ thị pha hay không? Câu trả lời là có. Đặc biệt, đồ thị pha rất có ích trong việc giải thích cái gọi là "đường cao tốc" khi xem xét những tầm kế hoạch dài nhưng hữu hạn.

Trong tầm hữu hạn, ta cần chẳng những cho trước vốn ban đầu K_0 như trong trường hợp tầm vô hạn, mà còn cần cho trước vốn lúc cuối K_T để nghiệm trở thành xác định. K_T là số vốn mà ta chọn để lại cho các thế hệ sống sau kỳ kế hoạch. Việc chọn nó là hoàn toàn tuỳ ý. Tuy nhiên, nếu ta tránh sự lựa chọn như vậy và đưa về bài toán với đường cuối thẳng đứng cụt, $K_T \geq 0$ thì quỹ đạo tối ưu đối với K sẽ chắc chắn $K_T = 0$, bởi vì mục tiêu cực đại tổng lợi ích trong tầm kế hoạch hữu hạn đòi hỏi đến thời gian T ta phải sử dụng hết vốn. Hợp lý hơn, ta sẽ chọn một K_T tuỳ ý nhưng dương. Trong Hình 2.12, ta giả sử rằng $K_T > K_0$.

Việc cho trước K_0 và K_T không đủ để xác định một nghiệm tối ưu duy nhất. Chẳng hạn có thể xảy ra tình huống trong không gian pha như nêu ra ở Hình 2.12a, các luồng $S_1,...,S_4$ (cũng như các luồng không vẽ ra khác), đều bắt đầu từ K_0, và cuối cùng đưa ta tới mức vốn K_T. Thông tin còn thiếu để có thể xác định lời giải là độ dài thời kỳ kế hoạch T.

Cho đường cong T_1 là quỹ tích các điểm mà các luồng đi đến sau đúng T_1 năm kể từ t = 0. Đường cong như vậy, được gọi là đường đẳng thời (đường

cong với thời gian bằng nhau), đường này có độ dốc dương vì lý do sau: Luồng S_1, xa nhất từ đường K' = 0 và vì vậy có giá trị K' lớn nhất trong số bốn luồng, phải tích luỹ được số vốn lớn nhất qua T_1 năm (ở đây là K_T), còn luồng S_4 ở thái cực ngược lại, phải kết thúc tại thời gian T_1 với số vốn ít nhất (ở đây không nhiều hơn K_0). Nếu thời kỳ kế hoạch là T_1 năm thì luồng S_1 rõ ràng sẽ là lựa chọn tốt nhất, vì trong khi tất cả các luồng thoả mãn phương trình Euler, chỉ có S_1 thoả mãn thêm điều kiện biên $K(0) = K_0$ và $K(T_1) = K_T$, với đường đi trải qua đúng T_1 năm.



Hình 2.12

Mỗi luồng là một quỹ đạo trong không gian pha K_M. Nhưng khi thời gian t trôi qua thì một điểm từ chỗ ban đầu sẽ vận động theo luồng . Do đó mỗi luồng sẽ cho ta một quỹ đạo K = K(t) trong không gian KT mà ta gọi là quỹ đạo vốn theo thời gian. Các đường đi thời gian đối với K tương ứng với bốn luồng được minh hoạ trong Hình 2.12b, trong đó để sắp xếp trục K như ở Hình 2.12a, ta vẽ trục thời gian thẳng đứng hướng xuống chứ không nằm ngang hướng sang phải. Để rút ra các đường đi theo thời gian này, ta dùng các đường đẳng thời. Khi đi xuống theo mỗi luồng trong Hình 2.12a, ta ghi lại các mức K thu được tại các thời điểm khác nhau (nghĩa là tại giao điểm với các đường đẳng thời khác nhau). Khi các thông tin như vậy được vẽ thành đồ thị trên Hình 2.12b, ta thu được các đường đi thời gian $P_1,\ldots, P_4$ trong đó P_i tương ứng với luồng S_i.

Với bài toán có tầm kế hoạch hữu hạn T_1, đường đi thời gian tối ưu đối với K chỉ gồm đoạn K_0G trên P_1. Đường đi thời gian P_1 là thích hợp đối với bài toán này, bởi vì S_1 đã được biết là luồng thích hợp; ta dừng ở điểm G trên P_1 vì đó là nơi ta đạt mức vốn K_T trong thời hạn T_1. Tuy nhiên, nếu tầm kế hoạch được đẩy về phía T_2 thì ta phải từ bỏ luồng S_1 và lấy luồng S_3. Đường đi thời gian tối ưu tương ứng đối với K khi đó sẽ là P_3, hay đúng hơn, đoạn K_0J của nó. Các giá trị khác của T cũng có thể được phân tích theo cách tương tự. Trong mỗi trường hợp, giá trị T khác nhau sẽ mang lại đường đi theo thời gian tối ưu khác nhau đối với K. Và, nói tóm lại, tất cả các đường đi thời gian tối ưu tầm hữu hạn đối với K là khác với đường di K tối ưu tầm vô hạn P_2 – đường đi Ramsey – gắn với luồng S_2, nhánh ổn định của điểm yên ngựa.

Với nền tảng này, ta có thể thảo luận về *hành vi kiểu đường đại lộ (đường cao tốc)* của các quỹ đạo tối ưu tầm hữu hạn. Trước hết, hãy tưởng tượng một người đi bằng xe ôtô con giữa hai thành phố có nhiều con đường nối chúng. Nếu khoảng cách phải đi không quá dài, có lẽ đơn giản nhất là chọn một đường nhỏ nhưng gần để đi. Nhưng nếu khoảng cách này đủ dài thì có thể thuận lợi hơn nếu chọn một con đường để đi vào một đường cao tốc và đi trên đó, cho đến một lối ra thích hợp gần thành phố muốn đến. Như vậy hành vi tương tự cũng đặc trưng cho các đường đi thời gian tối ưu tầm hữu hạn trong Hình 2.12b.

Khi đã cho K_0 là mức ban đầu và K_T là mức muốn đạt tới của vốn, nếu ta mở rộng liên tiếp tầm kế hoạch đủ xa về tương lai thì đường đi thời gian tối ưu có thể uốn cong, với mức độ tuỳ ý, về phía đường đi Ramsey P_2 hoặc về phía đường K_B – "đường cao tốc" trong biểu đồ này. Để thấy rõ hơn điều này, ta hãy so sánh các điểm M và N. Nếu tầm kế hoạch là T_4 thì đường đi tối ưu là đoạn K_0M trên P_4, đưa ta tới mức vốn K_T (điểm M) tại thời gian T_4. Tuy nhiên, nếu tầm kế hoạch được mở rộng tới T_5, ta phải chọn đoạn K_0N trên P_3 để thay thế, đưa ta tới mức vốn K_T (điểm N) tại thời gian T_5. Khi tầm kế hoạch T càng kéo dài thì quỹ đạo tối ưu ngày càng có xu hướng đến gần quỹ đạo Ramsey và đường thẳng K_B. Ta có thể nói nó có xu hướng đóng vai trò đường lớn hoặc nói là có hành vi kiểu đường lớn.

Rõ ràng ở đây có sự so sánh thú vị, khi đi đường, nếu khoảng cách càng xa thì người ta càng có xu hướng sử dụng đường cao tốc. Khi giải bài toán về vốn, nếu tầm kế hoạch càng xa ta càng chọn quỹ đạo có dáng điệu càng gần với đường lớn.

V. ÁP DỤNG TÍNH LỒI LÕM, ĐIỀU KIỆN ĐỦ VÀO CÁC MÔ HÌNH KINH TẾ

Ta đã chỉ ra rằng nếu hàm lấy tích phân F(t, y, y') trong bài toán điểm đầu mút cố định là lõm (lồi) theo các biến (y,y'), thì phương trình Euler là đủ đối với một cực đại (cực tiểu) tuyệt đối của V[y]. Hơn nữa, điều kiện đủ này vẫn áp dụng được khi thời gian cuối cố định nhưng trạng thái cuối biến đổi, với điều kiện bổ sung sau đây thoả mãn:

$$[F_{y'}(y - y^*)]_{t=T} \le 0$$

Đối với tầm nhìn vô hạn, điều kiện bổ sung này trở thành:

$$\lim_{t\to\infty} \left[F_{y'}(y - y^*)\right] \le 0 \qquad (2.144)$$

Trong điều kiện này, $F_{y'}$ lấy giá trị dọc theo đường đi tối ưu, và (y-y*) biểu thị độ lệch của bất kỳ quỹ đạo lân cận chấp nhận được y(t) so với đường đi tối ưu y*(t).

5.1. Áp dụng vào mô hình Eisner-Strotz

Trong mô hình Eisner-Strotz, hàm lấy tích phân F(t,K,K'), như chỉ ra trong (2.116), có đạo hàm cấp hai sau đây:

$$F_{K'K'} = -2ae^{-\rho t} \qquad F_{KK'} = F_{K'K} = 0 \quad \text{và}$$
$$F_{KK} = -2\beta e^{-\rho t}$$

ở đây tất cả các tham số là dương. Áp dụng quy tắc kiểm định tính xác định dấu, ta có:

$$|D_1| = F_{K'K'} < 0$$
$$|D_2| = \begin{vmatrix} F_{K'K'} & F_{K'K} \\ F_{KK'} & F_{KK} \end{vmatrix} = 4a\beta e^{-2\rho t} > 0$$

Suy ra rằng dạng toàn phương q gắn với các đạo hàm cấp hai này là xác định âm, và hàm lấy tích phân F là lõm chặt theo các biến (K,K').

Đối với mô hình hiện tại, điều kiện bổ sung (2.144) có dạng:

$$\lim_{t\to\infty} \left[F_{K'}(K - K^*)\right] \le 0 \qquad (2.145)$$

ở đây số hạng $F_{K'}$ cụ thể phải là

$$F_{K'} = -[2ar_2(K_0 - \overline{K})e^{r_2 t} + b]e^{-\rho t} \qquad (r_2 < 0) \qquad (2.146)$$

Rõ ràng rằng $F_{K'}$ tiến tới 0 khi t tiến ra vô hạn. Còn về thành phần (K - K*) của (2.145), dạng giả định của hàm lợi nhuận toàn phương biểu thị trong Hình 2.7a gợi ý rằng khi t tiến tới vô hạn hiệu số giữa giá trị K trên bất kỳ đường đi lân cận chấp nhận được và giá trị K* bị chặn. Như vậy, việc $F_{K'}$ triệt tiêu bảo đảm rằng điều kiện bổ sung (2.145) có thể thoả mãn như một đẳng thức. Do đó, tính lõm chặt của hàm lấy tích phân khiến cho phương trình Euler trở thành điều kiện đủ đối với một cực đại tuyệt đối duy nhất của tổng lợi nhuận Π(K).

5.2. Áp dụng vào mô hình Ramsey

Hàm lấy tích phân của mô hình Ramsey (đơn giản hoá) là:

$$F(t,K,K') = B - U(C) = B - U[Q(K) - K']$$

Ta giả sử rằng $U'(C) \ge 0$, $U''(C) < 0$, $Q(K)' > 0$ và $Q''(K) < 0$. Từ các đạo hàm cấp một sau đây của F:

$$F_K = -U'(C)\,Q'(K) \quad \text{và} \quad F_{K'} = -U'(C)\,(-1) = U'(C)$$

ta tìm được các đạo hàm cấp hai:

$$F_{K'K'} = U''(C)(-1) = -U''(C)$$
$$F_{KK'} = F_{K'K} = U''(C)Q'(K)$$
$$F_{KK} = -U''(C)[Q'(K)]^2 - U'(C)Q''(K)$$

Lại áp dụng kiểm định xác định dấu, ta thấy rằng:

$$|D_1| = F_{K'K'} > 0 \tag{2.147}$$

Nhưng vì:

$$|D_2| = \begin{vmatrix} F_{K'K'} & F_{K'K} \\ F_{KK'} & F_{KK} \end{vmatrix} = U''(C)U'(C)Q''(K) \geq 0 \tag{2.148}$$

là không dương chặt, ta không thể nói rằng dạng toàn phương q gắn với nó là xác định dương và rằng hàm F là lồi chặt. Tuy nhiên, có thể xác lập tính lồi (không chặt) của hàm F bằng phép kiểm định tính nửa xác định dấu. Đối chiếu với các định thức con chính, ta thấy rằng:

$$|D^0{}_1| = F_{KK} > 0 \quad \text{và} \quad |D^0{}_2| = |D_2| \geq 0$$

Các biểu thức này, cùng với thông tin trong (2.147) và (2.148), kéo theo:

$$|\tilde{D}_1| > 0 \text{ và } |\tilde{D}_2| \geq 0, \text{ trong đó } |\tilde{D}_1| = \{|D_1|, |D_1^0|\}; \ |\tilde{D}_2| = \{|D_2|, |D_2^0|\}$$

Trở lại điều kiện bổ sung (2.144), ta cần khẳng định rằng:

$$\lim_{t\to\infty} \left[F_{K'}(K - K^*)\right] \leq 0 \tag{2.149}$$

Vì $F_{K'} = U'(C)$, dễ dàng thấy rằng khi t tiến ra vô hạn (khi ta đi về phía mức hạnh phúc nhất và khi mức lợi ích biên giảm ổn định), $F_{K'}$ tiến tới 0. Còn về số hạng (K-K*), ta không thể phát biểu tổng quát rằng độ lệch của K(t) so với K*(t) tiến tới 0, hoặc bị chặn khi $t \to \infty$. Vì hàm sản xuất được giả định là có sản phẩm biên dương khắp nơi, nên đường cong Q(K) mở rộng vô hạn về phía trên, và không có giới hạn nào cho các giá trị có ý nghĩa kinh tế của K.

Về điều này, ta thấy rằng giả thiết về trạng thái bão hoà vốn giúp ích trong việc áp dụng điều kiện đủ. Nếu Q(K) chứa một điểm bão hoà, thì (K-K*) sẽ bị chặn khi $t \to \infty$, và (2.149) có thể thoả mãn như một đẳng thức. Trên thực tế, khi giả định có trạng thái bão hoà vốn, điều kiện (2.149) có thể thoả mãn ngay cả nếu không có trạng thái bão hoà tiêu dùng. Với điểm

bão hoà vốn $\hat{K}$ bây giờ được dùng để định nghĩa "mức hạnh phúc nhất", tất cả các đường đi chấp nhận được phải kết thúc ở $\hat{K}$. Như vậy, thành phần (K - K*) của (2.149) phải tiến tới 0 khi $t \to \infty$. Vì $F_{K'} = U'(C)$ bị chặn khi ta tiến tới gần mức hạnh phúc nhất, (2.149) thoả mãn như một đẳng thức. Do đó, khi đã cho rằng hàm F là lồi, trong trường hợp này, phương trình Euler là đủ đối với một cực tiểu tuyệt đối của tích phân $\int_0^\infty [B - U(C)]dt$.

E. BÀI TOÁN CÓ GIÁ TRỊ ĐỂ LẠI

Như ta biết trong thực tế, giá trị của hàm mục tiêu có thể phụ thuộc vào vị trí cuối cùng cũng như vào quỹ đạo. Thí dụ như tiền thưởng cho việc hoàn thành xuất sắc một công trình nghiên cứu khoa học. Có thể có giá trị để lại kết hợp với tài sản của một công ty ở thời gian cuối.

Ta hãy xét bài toán sau đây:giả sử phải chọn t_1 và y(t); $t_0 \le t \le t_1$ làm cực đại phiếm hàm:

$$\int_0^{t_1} F(t, y, y')dt + G(t_1, x_1) \qquad (2.150)$$

với ràng buộc là:

$$y(t_0) = y_0,$$

trong đó $y_1 = y(t_1)$ là giá trị cuối của hàm.

Bằng cách sử dụng kỹ thuật tương tự như ở đầu chương này ta đi đến một số kết quả cơ bản dưới dạng tóm tắt sau:

1. Các điều kiện cần

a. Phương trình Euler:

$$F_y = dF_{y'}/dt,\ t_0 \le t \le t_1$$

b. Điều kiện Legendre

$$(\max)\ F_{y'y'} \le 0,\ t_0 \le t \le t_1;$$

$$(\min)\ F_{y'y'} \ge 0,\ t_0 \le t \le t_1;$$

c. Điều kiện biên:

(i) $y(t_0) = y_0$

(ii) Nếu $y(t_1)$ là cố định thì $y(t_1) = y_1$ là đã biết

(iii) Nếu t_1 là cố định thì t_1 là đã biết.

(iv) Nếu t_1, y_1 phải thoả mãn $R(t_1) = y_1$, thì phương trình này cho ta một điều kiện.

d. Điều kiện hoành:

(i) Nếu $y(t_1)$ là tự do thì $F_{y'} + G_y = 0$ ở t_1

(ii) Nếu t_1 là tự do thì $F - \dot{y} F_{y'} + G_t = 0$ ở t_1

(iii) Nếu t_1, y_1 phải thoả mãn $R(t_1) = y_1$, thì:

$$F + F_{y'} (R' - y') + G_y R' + G_t = 0 \text{ ở } t_1.$$

2. Thí dụ. Tưởng tượng một đồ án nghiên cứu và phát triển mà trong đó lợi tức giảm đối với việc chi tiêu nhanh.

Đặt y(t) là tỷ lệ chi tiêu tiền ở thời kỳ t và z (t) là hiệu quả của đồ án ở thời gian t. Giả sử chi phí nghiên cứu y(t) liên hệ với hiệu quả của đồ án theo phương trình sau:

$$z'(t) = y^{1/2}(t) \tag{2.151}$$

Tổng cố gắng có hiệu quả đòi hỏi hoàn thành đồ án là A:

$$z(0) = 0, \qquad z(T) = A, \tag{2.152}$$

trong đó T ký hiệu thời gian hoàn thành (được xác định).

Phần thưởng là R khi đồ án hoàn thành, tỷ lệ chiết khấu của nó là r.

Giá trị của đồ án ở thời điểm 0 (bây giờ) là lợi nhuận trừ đi chi phí phát triển:

$$e^{-rT}R - \int_0^T e^{-rt} y(t)dt \tag{2.153}$$

Cực đại (2.153), với ràng buộc (2.151) và (2.152).

Để biểu diễn toàn bộ bài toán này theo z và z', sử dụng (2.151) để loại y; ta có thể viết lại (2.153) như sau:

$$\max\ e^{-rT}R - \int_0^T e^{-rt}[z'(t)]^2 dt \tag{2.154}$$

với ràng buộc (2.152)

Vì z không xuất hiện trong (2.154), phương trình Euler là:

$z'(t) = ce^{rt}$, giải cùng với điều kiện biên (2.152) và điều kiện hoành, vì T có thể tự do.

Tích phân và sử dụng diều kiện $z(0) = 0$ cho ta:

$$z(t) = ce^{rt}/r - c/r \tag{2.155}$$

Bài toán này đòi hỏi rằng:

$$z'(T) = (rR)^{1/2} \tag{2.156}$$

Ta cũng có:

$$ce^{rT} = (rR)^{1/2} \tag{2.157}$$

Cuối cùng, đặt z (T) = A trong (2.155) cho ta:

$$(e^{rT} - 1)\, c/r = A \tag{2.158}$$

giải (2.157) và (2.158) để tìm hai hằng số chưa biết c và T:

$$c = (rR)^{1/2} - rA \tag{2.159}$$

và

$$T = -r^{-1}\ln\,(1 - A(r/R)^{1/2}) \tag{2.160}$$

$$\text{vì} \quad T > 0 \text{ nên đòi hỏi } rA^2 < R \tag{2.161}$$

Thế (2.159) và (2.160) vào (2.155) cho:

$$z(t) = [(R/r)^{1/2} - A\}\,(e^{rt} - 1), \qquad 0 \le t \le T \tag{2.162}$$

như là quỹ đạo tối ưu của hiệu quả nghiên cứu và phát triển R & D miễn là (2.161) được thoả mãn.

Nếu (2.161) không được thoả mãn thì đồ án không được thực hiện. Từ (2.160), thời kỳ phát triển tối ưu T thay đổi trực tiếp với cố gắng đòi hỏi A và ngược lại với phần thưởng R; sự phát triển mà dễ dàng hơn, phần thưởng lớn hơn sẽ thúc đẩy phát triển. Kết hợp (2.162) và (2.151) cho ta quỹ đạo chi tiêu tối ưu. Nếu (2.161) đúng thì:

$$y(t) = [(rR)^{1/2} - rA]^2\, e^{2rt} \qquad 0 \le t \le T$$

trong đó T là đã cho trong (2.160). Ngược lại:

$$y(t) = 0, \qquad 0 \le t$$

F. CÁC BÀI TOÁN CÓ RÀNG BUỘC

Ở phần trên ta đã gặp các ràng buộc vài lần, mặc dù không gọi tên nó ra. Bất cứ khi nào một bài toán có một đường cong cuối được chỉ định hoặc một đường thẳng cuối thẳng đứng hay nằm ngang cụt, nó đặt một ràng buộc mà nghiệm phải thoả mãn. Tuy nhiên, những ràng buộc như vậy gắn liền với điểm đầu mút. Trong phần này, ta quan tâm tới những ràng buộc quy định tổng quát dáng điệu của các biến trạng thái. Một thí dụ đơn giản, các biến K và L có thể xuất hiện trong mô hình như các biến trạng thái, nhưng rõ ràng các đường đi theo thời gian của chúng không thể được chọn độc lập với nhau bởi vì K và L liên quan với nhau bởi những xem xét về công nghệ thông qua hàm sản xuất. Như vậy, mô hình phải có chỗ cho một ràng buộc hàm sản xuất. Nó cũng có thể có một ràng buộc gắn một biến trạng thái với đạo hàm theo thời gian của một biến khác. Thí dụ, một mô hình có thể chứa các biến trạng thái như tốc độ lạm phát kỳ vọng π và tốc độ lạm phát thực p. Tốc độ kỳ vọng π chịu sự điều chỉnh qua thời gian, khi nó lệch khỏi mức thực tế p. Sự điều chỉnh tốc độ lạm phát kỳ vọng có thể mô tả bằng ràng buộc như đã gặp trước đây.

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi) \qquad (0 < j \le 1).$$

Trong khi một ràng buộc như vậy có thể, qua phép thay thế, bị loại khỏi mô hình, nó cũng có thể vẫn còn và được xử lý dưới dạng hiển như một ràng buộc. Mục này giải thích điều đó được thực hiện như thế nào.

I. CÁC KIỂU CƠ BẢN CỦA CÁC RÀNG BUỘC CỦA BÀI TOÁN TÍNH BIẾN PHÂN

Mục này sẽ giới thiệu một số kiểu cơ bản của các ràng buộc trong các bài toán tối ưu hóa động. Như trong các bài toán tối ưu hoá tĩnh có ràng buộc, phương pháp nhân tử Lagrange đóng một vai trò quan trọng trong việc giải quyết các bài toán tối ưu hoá động có ràng buộc.

1.1. Các ràng buộc dạng phương trình đại số

$$\text{Cực đại} \quad V = \int_0^T F(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dt \qquad (2.163)$$

với m ràng buộc độc lập nhưng tương thích (m < n)

$$g^1(t, y_1, \ldots, y_n) = c_1$$

($c_1, \ldots, c_m$ là các hằng số) (2.164)

$$g^m(t, y_1, \ldots, y_n) = c_m$$

và các điều kiện biên thích hợp.

m ràng buộc đó là độc lập với nhau khi tồn tại một định thức Jacobian không suy biến cấp m đối với m trong n biến mà ta có thể giả thiết đó là m biến đầu tiên:

$$\underset{(m\times m)}{J} = \frac{\partial(g^1, \ldots, g^m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0 \qquad (2.165)$$

Lưu ý rằng, trong bài toán này, số ràng buộc m phải nhỏ hơn số biến trạng thái n. Nếu không, với (chẳng hạn) m = n, hệ phương trình (2.164) xác định duy nhất các đường đi y_j (t), và không còn bậc tự do nào để lựa chọn tối ưu.

Giống như phương pháp nhân tử Lagrange trong tối ưu hoá tĩnh, bây giờ ta xây dựng hàm lấy tích phân Lagrange, $\mathcal{F}$, bằng cách thêm thành phần cho hàm lấy tích phân ban đầu F trong (2.163) như sau:

$$\mathcal{F} = F + \lambda_1(t)(c_1 - g^1) + \cdots + \lambda_m(t)(c_m - g^m)$$
$$= F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)(c_i - g^i) \qquad (2.166)$$

Mặc dù cấu trúc của nó tỏ ra trùng với cấu trúc sử dụng trong tối ưu hoá tĩnh hàm Lagrange này, có hai khác biệt cơ bản. Thứ nhất, trong bài toán tối ưu hoá tĩnh số hạng chứa nhân tử Lagrange được cộng vào hàm mục tiêu ban đầu, còn ở bài toán tối ưu hoá động này, các số hạng chứa nhân tử Lagrange λ_i được cộng vào hàm lấy tích phân F, chứ không cộng vào phiếm hàm mục tiêu $V = \int_0^T F\,dt$. Thứ hai, trong khuôn khổ hiện tại, các nhân tử Lagrange λ_i không là các hằng số mà là hàm của t. Đó là vì mỗi ràng buộc g^i trong (2.164) được giả định là thoả mãn tại mọi thời điểm trong [0, T], và mỗi giá trị của t có thể có tương ứng một giá trị của nhân tử Lagrange λ_i gắn với biểu thức (c_i - g^i). Để nhấn mạnh sự kiện là λ_i có thể thay đổi theo t, ta viết $\lambda_i(t)$. Hàm lấy tích phân Lagrange $\mathcal{F}$ có các đối số không chỉ gồm các đối số thông thường t, y_j, và y'_j, (j = 1,..., n), mà còn các nhân tử λ_i (i = 1,..., m).

Thay F bởi $\mathcal{F}$ trong phiếm hàm mục tiêu ta được phiếm hàm mới:

$$\mathcal{V} = \int_0^T \mathcal{F} dt \tag{2.167}$$

mà ta có thể cực đại hoá như thể nó là một bài toán không ràng buộc. Nếu như các ràng buộc trong (2.164) được thoả mãn sao cho $c_i - g^i = 0$ với mọi i, thì giá trị của $\mathcal{F}$ sẽ đồng nhất với giá trị của F và cực trị tự do của $\mathcal{V}$ ở (2.167) sẽ trùng với cực trị có ràng buộc của V ở (2.163).

Bây giờ ta giải bài toán biến phân không có ràng buộc (2.167). Theo cách thông thường đã biết, các biến trạng thái phải thoả mãn phương trình Euler. Đối với bài toán (2.167) này, nhân tử $\lambda_i(t)$ là các biến trạng thái bổ sung, cho nên đôi khi phương trình Euler còn được gọi là phương trình Euler- Lagrange.

Phương trình Euler-Lagrange liên quan đối với các biến y_j là:

$$\mathcal{F}_{y_j} - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{y_j'} = 0, \text{với mọi } t \in [0, T], (j = 1, ..., n),$$

$$\text{(so sánh với (2.27))} \tag{2.168}$$

Đối với các nhân tử Lagrange, một cách tương tự, ta có:

$$\mathcal{F}_{\lambda_i} - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{\lambda_i'} = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \ (i = 1,..., m) \tag{2.169}$$

Tuy nhiên, vì trong biểu thức của $\mathcal{F}$ không có mặt các λ_i', ta có $\mathcal{F}_{\lambda_i'} = 0$ với mọi i, nên m phương trình trong (2.169) rút gọn thành:

$$\mathcal{F}_{\lambda_i} = 0 \text{ hay } c_i - g^i = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \tag{2.169'}$$

Nói cách khác, điều này cho thấy lời giải của bài toán (2.167) phải thoả mãn các ràng buộc (2.164).

1.1.1. Thủ tục thực hành giải bài toán biến phân có ràng buộc

Bước	Nội dung các bước
1	Áp dụng phương trình Euler-Lagrange chỉ cho n biến trạng thái y_j như trong (2.168),
2	Lấy m ràng buộc như dạng đã cho ban đầu trong (2.164),
3	Giải n + m phương trình này để tìm các đường đi $y_j(t)$ và $\lambda_i(t)$.

Điều này dẫn đến n phương trình vi phân cấp hai, các nghiệm y_j thu được sẽ chứa 2n hằng số tuỳ ý. Các hằng số này có thể được xác định bởi các điều kiện biên đối với các biến trạng thái.

1.1.2. Thí dụ 1: Hãy tìm đường cong với khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm đã cho $A = (0, y_0, z_0)$ và $B = (T, y_T, z_T)$ nằm trên mặt $\phi(t, y, z) = 0$.

Khoảng cách giữa cặp điểm đã cho được đo bằng tích phân $\int_0^T \left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} dt$, trông giống như tích phân $\int_0^T \left(1 + y'^2\right)^{1/2} dt$ đối với khoảng cách giữa hai điểm nằm trong một mặt phẳng. Như vậy, bài toán là:

Cực tiểu $\int_0^T \left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} dt$

với ràng buộc $\phi(t,y,z) = 0$

và $y(0) = y_0,\ y(T) = y_T,\ z(0) = z_0,\ z(T) = z_T$

Đây là một bài toán với hai biến trạng thái (n = 2) và một ràng buộc (m = 1).

Trong bước thứ nhất, ta thiết lập hàm lấy tích phân Lagrange:

$$\mathcal{F} = F + \lambda(t)\,(0 - \phi) = F - \lambda(t)\phi$$

$$= \left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} - \lambda(t)\phi(t, y, z)$$

Lấy đạo hàm riêng của phương trình này lần lượt theo y, z, y', z' ta được:

$$\mathcal{F}_y = -\lambda(t)\phi_y \qquad \mathcal{F}_{y'} = y'\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2}$$

$$\mathcal{F}_z = -\lambda(t)\phi_z \qquad \mathcal{F}_{z'} = z'\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2}$$

Các đạo hàm này dẫn tới hai phương trình Euler-Lagrange:

$$-\lambda(t)\phi_y - \frac{d}{dt}\left[y'\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2}\right] = 0$$

$$-\lambda(t)\phi_z - \frac{d}{dt}\left[z'\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2}\right] = 0$$

Cùng với ràng buộc:

$$\phi(t, y, z) = 0$$

cho ta ba phương trình để xác định ba đường đi tối ưu đối với y, z và λ.

1.2. Các ràng buộc dạng phương trình vi phân

Bây giờ giả sử rằng bài toán là cực đại hoá (2.163) với một tập hợp m ràng buộc độc lập và tương thích (m < n) gồm các phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} & g^1(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = c_1 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & g^m(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = c_m \end{aligned} \qquad (2.170)$$

và các điều kiện biên thích hợp.

Mặc dù bản chất của các phương trình ràng buộc đã thay đổi, về căn bản ta vẫn có thể áp dụng cùng một thủ tục như trước đây.

Hàm lấy tích phân Lagrange vẫn là:

$$\mathcal{F} = F + \lambda_1(t)(c_1 - g^1) + \cdots + \lambda_m(t)(c_m - g^m)$$

và các phương trình Euler-Lagrange đối với các biến trạng thái y_j vẫn có dạng:

$$\mathcal{F}_{y_j} - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{y_j'} = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \quad (j = 1, \dots, n).$$

Hơn nữa, các phương trình tương tự đối với các nhân tử Lagrange λ_i lại một lần nữa không là cái gì khác ngoài phát biểu lại các ràng buộc đã cho. Do đó ta có tổng cộng n phương trình Euler-Lagrange đối với các biến trạng thái, cộng với m ràng buộc để xác định n + m đường đi, $y_j(t)$ và $\lambda_i(t)$, với các hằng số tuỳ ý được xác định bằng các điều kiện biên.

1.3. Các ràng buộc dạng bất đẳng thức

Khi các ràng buộc được đặc trưng bởi các bất đẳng thức, bài toán có dạng như sau:

$$\text{Làm cực đại} \quad V = \int_0^T F(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\,dt$$

với ràng buộc

$$g^1(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') \le c_1$$

$$\ldots \tag{2.171}$$

$$g^m(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') \le c_m$$

và các điều kiện biên thích hợp

Vì các ràng buộc bất đẳng thức ít chặt chẽ hơn nhiều so với các ràng buộc đẳng thức, không cần quy định m < n. Ngay cả nếu số ràng buộc lớn hơn số biến trạng thái, các ràng buộc bất đẳng thức gộp lại sẽ không xác định duy nhất các quỹ đạo y_j và vì vậy sẽ không loại bỏ tất cả bậc tự do khỏi bài toán lựa chọn. Tuy nhiên, các ràng buộc bất đẳng thức phải tương thích với với nhau, cũng như với các khía cạnh khác của bài toán.

Để giải bài toán này, ta có thể lại một lần nữa viết hàm lấy tích phân Lagrange là:

$$\mathcal{F} = F + \lambda_1(t)(c_1 - g^1) + \cdots + \lambda_m(t)(c_m - g^m)$$

Trong khi các phương trình Euler-Lagrange đối với các biến y_j:

$$\mathcal{F}_{y_j} - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{y_j'} = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \quad (j = 1, \ldots, n)$$

không khác với trước đây, các phương trình tương ứng đối với các nhân tử Lagrange phải được cải biên thích đáng để phản ánh bản chất bất đẳng thức của các ràng buộc. Để đảm bảo rằng tất cả các số hạng $\lambda_i(t)(c_i - g^i)$ triệt tiêu trong lời giải (để các giá trị tối ưu hoá của $\mathcal{F}$ và F bằng nhau), ta cần một mối quan hệ bù yếu giữa nhân tử thứ i và ràng buộc thứ i, đối với mọi i (một tập hợp m phương trình):

$$\lambda_i(t)(c_i - g^i) = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0,T] \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.172}$$

Mối quan hệ bù yếu này đảm bảo rằng:

(1) bất cứ khi nào nhân tử Lagrange khác 0 thì ràng buộc thứ i sẽ thoả mãn như một đẳng thức chặt, và:

(2) bất cứ khi nào ràng buộc thứ i là một bất đẳng thức chặt thì nhân tử Lagrange thứ i sẽ là 0. Chính quan hệ này dùng để duy trì sự đồng nhất giữa giá trị tối ưu của hàm lấy tích phân F và giá trị tối ưu của hàm lấy tích phân $\mathcal{F}$ trong (2.166).

1.4. Các ràng buộc dạng phương trình tích phân (Bài toán đẳng chu)

Kiểu ràng buộc cuối cùng được xem xét ở đây là ràng buộc dạng phương trình tích phân, chẳng hạn như:

$$\int_0^T G(t, y, y')\,dt = k \qquad \text{(k là hằng số)} \tag{2.173}$$

Một trong những bài toán sớm nhất có chứa một ràng buộc như vậy là bài toán tìm hình có diện tích lớn nhất được bao quanh bởi một đường cong có chiều dài đã cho. Vì tất cả các hình chấp nhận được trong bài toán phải có cùng một chu vi, bài toán này được gọi là *bài toán đẳng chu*.

Tuy nhiên, về sau, tên gọi này được mở rộng cho tất cả các bài toán có chứa các ràng buộc tích phân, nghĩa là đối với bất kỳ bài toán dạng tổng quát:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T F(t, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')\,dt \tag{2.174}$$

với ràng buộc

$$\int_0^T G^1(t, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')\,dt = k_1, \tag{2.175}$$

.

.

$$\int_0^T G^m(t, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')\,dt = k_m \tag{2.176}$$

và các điều kiện biên thích hợp.

Trong bài toán với ràng buộc tích phân (đẳng chu), lại một lần nữa không cần đòi hỏi m < n, bởi vì ngay cả với m ≥ n, bậc tự do chọn tối ưu không bị loại bỏ.

Có hai đặc trưng phân biệt bài toán có ràng buộc tích phân (đẳng chu) với các bài toán có ràng buộc khác. Thứ nhất, ràng buộc trong (2.173) không hạn chế các biến y tại mỗi thời điểm, mà chỉ bắt buộc tích phân một hàm G nào đó của chúng đạt một giá trị cụ thể. Do đó, theo nghĩa nào đó, ràng buộc này gián tiếp hơn. Một đặc trưng khác là các giá trị lời giải của các nhân tử Lagrange $\lambda_i(t)$ đều là những hằng số, do đó chúng được viết đơn giản là λ_i.

Để kiểm chứng rằng các nhân tử Lagrange quả thực là những hằng số trong lời giải, ta hãy xét trường hợp một biến trạng thái y và một ràng buộc tích phân đơn (m = n = 1). Đầu tiên, ta hãy định nghĩa một hàm $\Gamma'(t)$ thỏa mãn điều kiện:

$$G(t,y,y') - \Gamma'(t) = 0 \tag{2.177}$$

và ta thấy hệ thức thu được này tuân theo cấu trúc tổng quát của ràng buộc vi phân $g(t,y,y') = c$, với $g = G - \Gamma'$ và $c = 0$. Như vậy, ta đã đưa ràng buộc dạng tích phân (2.176) về ràng buộc dạng vi phân. Nhờ thế ta có thể sử dụng cách tiếp cận đã thảo luận trước đây để giải bài toán.

Trước hết, ta viết hàm Lagrange:

$$\begin{aligned}\widetilde{F} &= F(t,y,y') + \lambda(t)[0 - G(t,y,y') + \Gamma'(t)] \qquad (2.178)\\ &= F(t,y,y') - \lambda(t)G(t,y,y') + \lambda(t)\Gamma'(t)]\end{aligned}$$

(Ta ký hiệu hàm lấy tích phân Lagrange cụ thể này là $\widetilde{F}$ chứ không phải $\mathcal{F}$, bởi vì nó chỉ là một biểu thức trung gian mà sau này sẽ được thay bằng một hàm Lagrange đơn giản hơn). Khác với các biểu thức $\mathcal{F}$ gặp trước đây, ta nhận xét rằng $\widetilde{F}$ có chứa một biến phụ thêm Γ - mặc dù Γ tham gia vào $\widetilde{F}$ chỉ ở dạng đạo hàm của nó $\Gamma'(t)$. Biến phụ thêm này đóng vai trò như một biến trạng thái, cũng phải thoả mãn phương trình Euler-Lagrange. Viết phương trình Euler cho $\widetilde{F}$ ta được hai điều kiện sau:

$$\widetilde{F}_y - \frac{d}{dt}\widetilde{F}_{y'} = 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0, T] \tag{2.179}$$

$$\widetilde{F}_\Gamma - \frac{d}{dt}\widetilde{F}_{\Gamma'} = 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0, T] \tag{2.180}$$

Vì biểu thức $\widetilde{F}$ không chứa Γ, và vì $\widetilde{F}_{\Gamma'} = \lambda(t)$, ta thấy rằng (2.180) rút gọn về điều kiện

$$-\frac{d}{dt}\lambda(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \text{hằng số} \tag{2.180'}$$

Điều này khẳng định ý kiến trước đây của chúng ta về tính chất hằng số của λ. Từ đó, ta có thể viết nhân tử Lagrange của bài toán với ràng buộc tích phân (đẳng chu) đơn giản là λ.

Với nhân tử Lagrange λ hằng số, phương trình Euler-Lagrange (2.179) có dạng đặc biệt là:

$$(F_y - \lambda G_y) - \frac{d}{dt}(F_{y'} - \lambda G_{y'}) = 0 \qquad (2.181)$$

Ta thấy ngay rằng sẽ thu được phương trình (2.181) này khi viết phương trình Euler- Lagrange cho hàm $\tilde{F}$ dưới đây, gọi là hàm Lagrange cải biên (không có số hạng Γ'(t)):

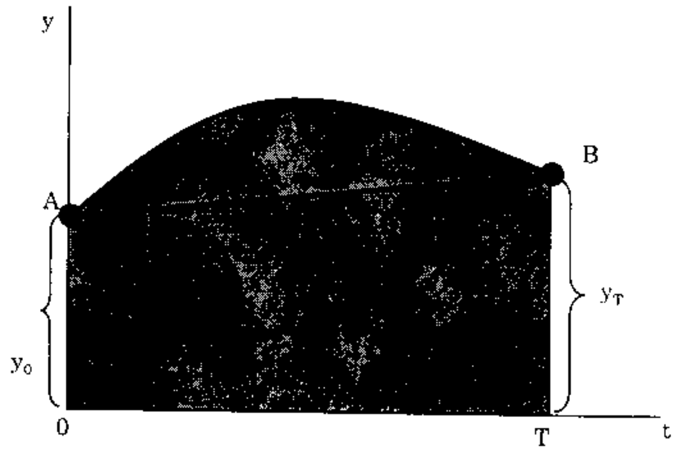
$$\mathcal{F} = F(t,y,y') - \lambda\, G(t, y, y') \qquad (\lambda \text{ là hằng số}) \qquad (2.182)$$

Chú ý rằng hàm $\mathcal{F}$ thu được từ $\tilde{F}$ sau khi bỏ đi thành phần Γ'. Việc dùng hàm $\mathcal{F}$ và $\tilde{F}$ đều cùng đưa đến điều kiện (2.181) để tìm y tối ưu. Do đó trong thực hành giải bài toán ta chỉ cần dùng hàm Lagrange cải biên $\mathcal{F}$.

Thủ tục trên có thể dễ dàng tổng quát hoá cho trường hợp n biến trạng thái, m ràng buộc tích phân. Trong trường hợp này, hàm Lagrange cải biên là:

$$\mathcal{F} = F - (\lambda_1 G^1 + \ldots + \lambda_m G^m) \qquad (\text{các } \lambda_i \text{ là hằng số}) \qquad (2.183)$$

Thí dụ 2: Hãy tìm đường cong AB, đi qua hai điểm đã cho $A = (0,y_0)$ và $B = (T,y_T)$ trong mặt phẳng ty, và có chiều dài k cho trước, làm cực đại diện tích dưới đường cong.



Hình 2.13

Bài toán này, như minh hoạ trong Hình 2.13, là:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T y\,dt$$

với ràng buộc $\int_0^T \left(1+y'^2\right)^{1/2} dt = k$

và $y(0) = y_0 \qquad y(T) = y_T$

Để bài toán này có lời giải ta giả thiết k > L, trong đó L là chiều dài của đoạn thẳng AB.

Để tìm điều kiện cần đối với lời giải, đầu tiên ta viết hàm lấy tích phân Lagrange (2.182):

$$\mathcal{F} = y - \lambda\left(1+y'^2\right)^{1/2} \quad (\lambda \text{ là hằng số}) \qquad (2.184)$$

Vì hàm này không chứa t như một đối số một cách tường minh. Như đã biết, trường hợp này phương trình Euler-Lagrange đưa đến điều kiện:

$$\mathcal{F} - y'\mathcal{F}_{y'} = c_1 \quad (c_1 \text{ là hằng số tuỳ ý}) \qquad (2.185)$$

Vì $\mathcal{F}_{y'} = -\lambda y'\left(1+y'^2\right)^{-1/2}$, (2.185) cho ta:

$$y - \lambda\left(1+y'^2\right)^{1/2} + \lambda y'^2\left(1+y'^2\right)^{1/2} = c_1 \qquad (2.185')$$

Ta giải phương trình này đối với y'. Hoán vị các số hạng và đơn giản hoá, ta có thể viết:

$$y - c_1 = \frac{\lambda}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}} \quad \text{hay} \quad \left(1+y'^2\right)^{1/2} = \frac{\lambda}{y-c_1}.$$

Bình phương cả hai vế, sau đó trừ cả hai vế cho 1, ta được:

$$y'^2 = \frac{\lambda^2 - (y-c_1)^2}{(y-c_1)^2}$$

Căn bậc hai của biểu thức này cho ta biểu thức sau của y' theo λ, y và c_1:

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y-c_1)^2}}{y-c_1}$$

Tuy nhiên, vì y' ≡ dy/dt, kết quả cuối cùng có thể viết một cách khác là:

$$\frac{y-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(y-c_1)^2}}\,dy = dt \qquad (2.185'')$$

Đây là một phương trình vi phân phi tuyến với các biến tách được, có thể giải bằng cách lấy tích phân hai vế.

Tích phân của dt, biểu thức ở vế phải trong (2.185"), đơn giản là t + hằng số. Và tích phân của biểu thức ở vế trái là $-\sqrt{\lambda^2-(y-c_1)^2}$ + hằng số. Như vậy, bằng cách đặt hai tích phân bằng nhau, kết hợp chung hai hằng số tích phân vào một ký hiệu, $-c_2$, bình phương cả hai vế và sắp xếp lại, cuối cùng ta thu được nghiệm tổng quát

$$(y-c_1)^2+(t-c_2)^2=\lambda^2 \tag{2.186}$$

Vì đây là phương trình đối với một họ đường tròn, với tâm (c_2, c_1) và bán kính λ, đường cong phải tìm AB phải là cung của một đường tròn. Các giá trị cụ thể của c_1, c_2 và λ có thể xác định từ các điều kiện biên và phương trình ràng buộc.

II. ỨNG DỤNG CỦA BÀI TOÁN TÍNH BIẾN PHÂN CÓ RÀNG BUỘC VÀO KINH TẾ

Trong khi phương pháp nhân tử Lagrange có thể đóng một vai trò trung tâm trong các bài toán có ràng buộc, đặc biệt là trong các bài toán với các hàm tổng quát, có thể, và đôi khi còn đơn giản hơn, giải quyết các bài toán có ràng buộc bằng phép thế hoặc khử các biến. Thực tế, hầu hết các mô hình kinh tế đã thảo luận trước đây chứa các ràng buộc, và trong quá trình giải ta đã thay thế để đưa các biến nhất định ra ngoài. Trong mục này, ta sẽ xem xét lại mô hình Ramsey và mô hình lựa chọn giữa lạm phát thất nghiệp, để minh hoạ phương pháp nhân tử Lagrange. Các kết quả tất nhiên sẽ trùng hợp bất kể sử dụng phương pháp nào.

2.1. Mô hình Ramsey

Ở mô hình Ramsey đã trình bày trước, hàm dưới dấu tích phân trong phiếm hàm mục tiêu là:

$$F = B - U(C) + D(L),\ \text{ở đây}\ C = Q(K,L) - K'.$$

Trước đây bằng cách thay C bằng biểu thức chứa K, L của nó, hàm F được coi là chỉ chứa hai biến, K và L.

Bây giờ, để chỉ ra phương pháp nhân tử Lagrange có thể được áp dụng như thế nào, ta hãy coi C như một biến ngang hàng với K và L và ràng buộc:

$$g(C, L, K, K') = Q(K, L) - K' - C = 0.$$

Với cách nhìn nhận như thế bài toán có thể đặt dưới dạng bài toán có ràng buộc:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^\infty [B - U(C) + D(L)]dt \qquad (2.187.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad Q(K, L) - K' - C = 0 \qquad (2.187.2)$$

và các điều kiện biên (2.187.3)

Hàm Lagrange cho bài toán này là:

$$\mathcal{F} = B - U(C) + D(L) + \lambda\, [\, - Q(K,L) + K' + C] \qquad (2.188)$$

Vì bây giờ ta có ba biến (C, L, K) và một nhân tử Lagrange λ (không phải là hằng số), nên phải có cả thảy bốn phương trình Euler-Lagrange:

$$\mathcal{F}_C - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{C'} = -U'(C) + \lambda = -M + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = M \qquad (2.189)$$

$$\mathcal{F}_L - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{L'} = D'(L) - \lambda Q_L = D'(L) - MQ_L = 0 \quad \text{(theo (2.189))} \qquad (2.190)$$

$$\mathcal{F}_K - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{K'} = -\lambda Q_K - \frac{d}{dt}\lambda = -MQ_K - \frac{dM}{dt} = 0 \text{ (theo (2.189))} \qquad (2.191)$$

$$\mathcal{F}_\lambda - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{\lambda'} = -Q(K,L) + K' + C = 0 \qquad (2.192)$$

Điều kiện (2.189) cho ta thấy rằng nhân tử Lagrange λ bằng M - ký hiệu ta sử dụng đối với lợi ích biên của tiêu dùng. Điều kiện (2.190) trùng với (2.127). Tương tự, (2.191) mang cùng thông tin như (2.190). Cuối cùng, (2.192) chỉ phát biểu lại ràng buộc. Như vậy, phương pháp nhân tử Lagrange sẽ mang lại cùng một kết luận như trước đây.

2.2. Mô hình lựa chọn giữa lạm phát và thất nghiệp

Mô hình lựa chọn giữa lạm pháp và thất nghiệp đã trình bày trước bây giờ sẽ được trình bày lại như một bài toán với hai ràng buộc. Sự xuất hiện thêm hai ràng buộc làm cho quá trình giải phức tạp hơn.

Một cách đơn giản, ta sẽ sử dụng ký hiệu y để biểu thị $(Y - Y_f)$ (độ lệch của thu nhập quốc dân hiện tại Y so với mức toàn dụng nhân công Y_f của nó). Khi đó hàm lấy tích phân F – hàm tổn thất – có thể được viết là:

$$\lambda = y^2 + \alpha p^2 \qquad (\alpha > 0)$$

Quan hệ Philips được bổ sung thêm các kỳ vọng và phương trình điều chỉnh kỳ vọng, mà trước đây được sử dụng để đưa y và p ra ngoài, giữ lại biến π, bây giờ sẽ được chấp nhận như hai ràng buộc:

$$g^1(t,y,p,\pi,\pi') = \beta y + p - \pi = 0$$

$$g^2(t,y,p,\pi,\pi') = j(p - \pi) - \pi' = 0$$

Như vậy, bài toán có thể đặt lại dưới dạng có hai ràng buộc, một cho bởi phương trình đại số, và một cho bởi phương trình vi phân.

Cực đại $\displaystyle\int_0^T (y^2 + \alpha p^2)e^{-\rho t}dt$ (2.193.1)

với ràng buộc $\beta y + p - \pi = 0$ (2.193.2)

$j(p - \pi) - \pi' = 0$ (2.193.3)

và các điều kiện biên (2.193.4)

Hàm Lagrange của bài toán là:

$$\mathcal{F} = (y^2 + \alpha p^2)e^{-\rho t} + \lambda_1(-\beta y - p + \pi) + \lambda_2(-jp + j\pi + \pi') \qquad (2.194)$$

với ba biến y, p và π và hai nhân tử Lagrange (không ràng buộc) λ_1 và λ_2.

Các phương trình Euler-Lagrange là:

$$\mathcal{F}_y - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{y'} = 2ye^{-\rho t} - \beta\lambda_1 = 0 \qquad (2.195)$$

$$\mathcal{F}_p - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{p'} = 2\alpha pe^{-\rho t} - \lambda_1 - j\lambda_2 = 0 \qquad (2.196)$$

$$\mathcal{F}_\pi - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{\pi'} = \lambda_1 + j\lambda_2 - \frac{d}{dt}\lambda_2 = 0 \qquad (2.197)$$

$$\mathcal{F}_{\lambda_1} - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{\lambda_1'} = -\beta y - p + \pi = 0 \qquad (2.198)$$

$$\mathcal{F}_{\lambda_2} - \frac{d}{dt}\mathcal{F}_{\lambda_2'} = -jp + j\pi + \pi' = 0 \qquad (2.199)$$

Có thể giải đồng thời các phương trình này như sau. Đầu tiên, giải (2.198) đối với y, thế kết quả vào (2.195), và giải đối với λ_1 để thu được:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\beta^2}(\pi - p)e^{-\rho t} \tag{2.200}$$

Tiếp theo, giải (2.199) theo p:

$$p = \pi + \frac{1}{j}\pi' \tag{2.201}$$

Thế (2.201) vào (2.200) ta khử được π và p trong biểu thức λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{-2}{\beta^2 j}\pi' e^{-\rho t} \tag{2.202}$$

Sau đó thế cả (2.201) và (2.202) vào (2.196) và giải đối với λ_2, ta thu được (sau khi đơn giản hoá):

$$\lambda_2 = \left[\frac{2\alpha}{j}\pi + \frac{2(1+\alpha\beta^2)}{\beta^2 j^2}\pi'\right]e^{-\rho t} \tag{2.203}$$

Kết quả này kéo theo đạo hàm toàn phần:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\rho\left[\frac{2\alpha}{j}\pi + \frac{2(1+\alpha\beta^2)}{\beta^2 j^2}\pi'\right]e^{-\rho t} + \left[\frac{2\alpha}{j}\pi' + \frac{2(1+\alpha\beta^2)}{\beta^2 j^2}\pi''\right]e^{-\rho t} \\ &= 2\left[\frac{-\alpha\rho}{j}\pi + \frac{\alpha\beta^2 j - \rho(1+\alpha\beta^2)}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{(1+\alpha\beta^2)}{\beta^2 j^2}\pi''\right]e^{-\rho t}\end{aligned} \tag{2.204}$$

Cuối cùng ta thế các biểu thức của λ_1, λ_2 và $d\lambda_2/dt$ từ ba phương trình cuối cùng vào (2.197). Sau khi kết hợp và ước lượng các số hạng ta thu được kết quả rất đơn giản:

$$\pi'' - \rho\pi' - \frac{\alpha\beta^2 j(\rho + j)}{1+\alpha\beta^2}\pi = 0 \tag{2.205}$$

Kết quả này đúng là sự trình bày ngắn gọn các điều kiện từ (2.195) đến (2.199).

Vì (2.205) đồng nhất với kết quả trước đây (2.46), ta một lần nữa kiểm tra được là phương pháp nhân tử Lagrange dẫn đến cùng một kết luận như trước. Tuy nhiên, lần này phương pháp nhân tử Lagrange đòi hỏi nhiều tính toán hơn. Do đó ta thấy rằng đôi khi cách khử biến sơ cấp có thể được việc hơn. Trong trường hợp việc khử biến không làm được (thí dụ, trong các hàm tổng quát), phương pháp nhân tử Lagrange cho thấy sức mạnh của nó rõ rệt nhất.

2.3. Kinh tế học về các tài nguyên có thể cạn kiệt - Mô hình Hotelling về khai thác tối ưu trên giác độ xã hội

Quay lại mô hình của Hotelling đã trình bày ở chương I để làm thí dụ. Bài toán tìm quá trình khai thác $\dot{Q}(t)$ như sau:

Cực đại $$V = \int_0^\infty N(Q)e^{-\rho t}\,dt \qquad (2.206)$$

Với ràng buộc $$\int_0^\infty Q\,dt = S_0. \qquad (2.207)$$

Rõ ràng, đây là một bài toán đẳng chu. Bởi vì giả thiết hàm giá trị xã hội ròng bị chặn trên là có lý, nên tích phân suy rộng trong phiếm hàm mục tiêu phải hội tụ.

Hàm Lagrange là:

$$\mathcal{F} = N(Q)e^{-\rho t} - \lambda Q \quad (\lambda \text{ là hằng số}) \qquad (2.208)$$

Do hàm lấy tích phân $\mathcal{F}$ không chứa đạo hàm của Q: cực trị thu được từ phương trình Euler-Lagrange có thể không hợp với các điểm đầu mút đã cho. Tuy nhiên, nếu không có điểm đầu mút quy định cứng nào thì ta vẫn có thể áp dụng phương trình Euler-Lagrange bởi vì $\mathcal{F}_{Q'} = 0$ nên trong trường hợp hiện tại nó rút gọn về điều kiện $\mathcal{F}_Q = 0$, hay:

$$N'(Q)e^{-\rho t} - \lambda = 0 \qquad (2.209)$$

Áp dụng công thức lấy vi phân cho N(Q) ta được:

$$[P(Q) - C'(Q)]e^{-\rho t} - \lambda = 0 \qquad (2.209')$$

Ý nghĩa kinh tế của điều kiện này trở nên dễ giải thích khi ta nhớ lại rằng, đối với một bài toán đẳng chu, nhân tử Lagrange λ là một hằng số. Dọc theo quá trình khai thác tối ưu, giá trị P(Q) - C'(Q) gắn với thời điểm bất kỳ phải có giá trị quy đổi về hiện tại đồng nhất bằng λ, ở đây ρ đóng vai trò tỷ suất chiết khấu. Bằng cách sắp xếp lại các số hạng chút ít, ta có thể giải thích điều kiện này như đòi hỏi rằng P(Q) - C'(Q) tăng với tốc độ ρ:

$$P(Q) - C'(Q) = \lambda e^{\rho t} \quad (\textit{tối ưu xã hội}) \qquad (2.209'')$$

Từ phương trình cuối cùng, cũng rõ ràng rằng λ có ý nghĩa của "giá trị tại t = 0 của P(Q)-C'(Q)." Nếu hàm P(Q) và C(Q) là các hàm cụ thể, ta có

thể giải (2.209") để tìm Q biểu diễn theo λ và t, chẳng hạn $Q(\lambda,t)$. Hàm này, khi thế vào ràng buộc trong (2.207), tạo điều kiện cho ta giải đối với λ.

2.3.1. Cạnh tranh thuần tuý so sánh với với độc quyền

Một kết luận chính được rút ra từ mô hình của Hotelling là cạnh tranh thuần tuý có thể mang lại con đường khai thác trùng với con đường tối ưu xã hội, còn một công ty độc quyền sẽ chấp thuận một con đường khai thác bảo tồn hơn, nhưng gần tối ưu xã hội. Bây giờ ta sẽ xét luận điểm này của ông.

Để đơn giản, giả sử rằng có n công ty trong điều kiện cạnh tranh thuần tuý. Công ty thứ i khai thác với mức Q_i từ tổng dự trữ S_i dưới sự kiểm soát đã biết. Bài toán của công ty là cực đại hoá tổng lợi nhuận được chiết khấu qua thời gian, với giá sản phẩm đã cho là P_0:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^\infty [P_0Q_i - C_i(Q_i)]e^{-\rho t}\, dt \qquad (2.210.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \int_0^\infty Q_i\, dt = S_i \qquad (2.210.2)$$

Hàm Lagrange trong trường hợp này là:

$$\mathcal{F} = [P_0Q_i - C_i(Q_i)]e^{-\rho t} - \lambda Q_i$$

Từ phương trình Euler-Lagrange cho ta:

$$[P_0 - C_i'(Q_i)]e^{-\rho t} - \lambda = 0$$

hay:

$$P_0 - C_i'(Q_i) = \lambda e^{\rho t} \quad \text{(cạnh tranh thuần tuý)} \quad (2.211)$$

Điều kiện phù hợp tốt với điều kiện tối ưu cho xã hội (2.209"), ở chỗ nó cũng đòi hỏi khoảng cách giữa giá của tài nguyên có thể cạn kiệt với chi phí biên khai thác nó phải tăng theo hàm mũ với tốc độ ρ.

Trái lại, bài toán cực đại hoá lợi nhuận độc quyền là:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^\infty [RQ - C(Q)]e^{-\rho t}\, dt \qquad (2.211.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \int_0^\infty Q\, dt = S_0 \qquad (2.211.2)$$

Bây giờ hàm Lagrange là:

$$\mathcal{F} = [RQ - C(Q)]e^{-\rho t} - \lambda Q$$

Phương trình Euler-Lagrange dẫn tới điều kiện:

$$R'(Q) - C'(Q) = \lambda e^{\rho t} \quad \text{(độc quyền)} \tag{2.212}$$

Điều kiện này khác với quy tắc khai thác tối ưu cho xã hội. Ở đây, hiệu số giữa doanh thu biên (chứ không phải giá cả) và chi phí biên tăng theo tốc độ ρ, với λ bây giờ là giá trị ban đầu của hiệu số này.

2.3.2. Công ty độc quyền và sự bảo tồn

Tuy nhiên, từ mô hình của Hotelling không chỉ đưa đến kết luận rằng sản xuất độc quyền một tài nguyên có thể cạn kiệt là gần tối ưu, mà còn cho rằng nó chệch rõ rệt về phía chủ nghĩa bảo tồn một cách quá mức. Ý kiến này đúng đến mức nào? Câu trả lời là: Không phải bao giờ cũng thế, chỉ tuỳ theo những hoàn cảnh nhất định. Vấn đề này đã được nhiều người nghiên cứu, sử dụng các giả thiết khác nhau. Sự khác nhau trong các giả thiết dẫn đến những kết luận khác nhau. Thí dụ, Stiglitz đã chỉ ra rằng nếu độ co giãn của cầu tăng theo thời gian (với sự khám phá ra những sản phẩm thay thế), hoặc nếu chi phí khai thác là hằng số trên một đơn vị khai thác nhưng giảm theo thời gian (với công nghệ tốt hơn), thì công ty độc quyền có khuynh hướng bảo tồn môi trường hơn so với tình trạng tối ưu xã hội. Nhưng có kết luận ngược lại trong các nghiên cứu của Lewis, Mathews và Burness, với giả thiết rằng chi phí khai thác không đổi theo mức khai thác (chi phí vốn, phí thuê mua, v.v... căn bản là những chi phí cố định), và rằng độ co giãn của cầu tăng theo tiêu dùng (giá đủ thấp có thể thu hút nhiều người chuyển sang sử dụng những sản phẩm thay thế).

Trong một mô hình con của Stiglitz, công ty độc quyền có hàm cầu ngược:

$$P = \varphi(t)Q^{\alpha-1} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

Độ co giãn của cầu $1/(1 - \alpha)$. Chi phí trên một đơn vị khai thác là hằng số tại một thời gian cho trước bất kỳ, nhưng có thể giảm qua thời gian:

$$C = \phi(t)Q \qquad (\phi' < 0) \tag{2.213}$$

Như vậy, lợi nhuận là:

$$PQ - C = \varphi(t)Q^{\alpha} - \phi(t)Q$$

và bài toán tối ưu động của công ty độc quyền là:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^\infty [\varphi(t)Q^\alpha - \phi(t)(Q]e^{-\rho t}\, dt \qquad (2.214.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \int_0^\infty Q\, dt = S_0 \qquad (2.214.2)$$

Mặt khác, mô hình Lewis-Mathews-Burness sử dụng hàm cầu ngược P(Q) dừng, mặc dù độ co giãn của cầu được giả định là tăng theo tiêu dùng. Vì chi phí khai thác được giả định là một khoản chi phí cố định (= Φ), bài toán của công ty độc quyền là:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^\infty [P(Q)Q - \Phi]e^{-\rho t}\, dt \qquad (2.215.1)$$

$$\text{Với ràng buộc} \quad \int_0^\infty \dot{Q}\, dt = S_0 \qquad (2.215.2)$$

Có thể áp dụng phương trình Euler-Lagrange cho mỗi một trong hai bài toán này theo cách thức tương tự như đối với mô hình Hotelling. Từ quá trình đó, ta có thể suy diễn ra tốc độ tăng tối ưu của Q đối với công ty độc quyền. So sánh tốc độ đó với tốc độ tăng xác định bởi tối ưu xã hội sẽ cho thấy công ty độc quyền bảo tồn môi trường quá mức hay là chưa đủ. Tuy nhiên, thay vì phân tích bài toán (2.214) và (2.215) một cách riêng rẽ, ta sẽ làm việc với một dạng tổng quát hơn gộp làm một những xem xét có trong (2.214) và (2.215).

Cho hàm cầu và hàm chi phí được biểu thị dưới dạng:

$$Q = e^{gt} D(P) \qquad [D'(P) < 0] \qquad (2.216)$$

$$C = C(Q,t) \qquad (C_Q \geq 0,\ C_{tQ} \leq 0) \qquad (2.217)$$

Chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu $MR \equiv R'(Q)$ và $MC \equiv C'(Q)$, và ký hiệu $r_x \equiv (dx/dt)/x$ đối với tốc độ tăng của biến x bất kỳ.

Điều kiện tối ưu xã hội rút ra từ phương trình Euler-Lagrange (2.209") đòi hỏi rằng $r_{(P-MC)} = \rho$. Sử dụng công thức quen thuộc đối với tốc độ tăng của một hiệu, ta có thể viết lại là:

$$\frac{P}{P - MC} r_P - \frac{MC}{P - MC} r_{MC} = \rho$$

Từ đó:

$$r_P = \rho\left(1 - \frac{MC}{P}\right) + \frac{MC}{P} r_{MC} \tag{2.218}$$

Ta có thể chuyển r_P này thành r_Q tương ứng bằng cách sử dụng sự kiện là r_Q liên hệ với r_P qua độ co giãn của cầu $\varepsilon < 0$, hay giá trị tuyệt đối của nó, $E = |\varepsilon|$, như sau:

$$r_Q = g - E r_P \tag{2.219}$$

Thế (2.218) vào (2.219), ta tìm được tốc độ tăng tối ưu xã hội của Q, ký hiệu bởi r_{Q_s} (s để chỉ tối ưu xã hội), là:

$$r_{Q_s} = g - E\left[\rho\left(1 - \frac{MC}{P}\right) + \frac{MC}{P} r_{MC}\right] \text{ (tối ưu xã hội)} \tag{2.220}$$

Biểu thức tương ứng đối với r_{Q_m} (m để chỉ độc quyền) có thể rút ra bằng một thủ tục tương tự. Điều kiện $r_{(MR-MC)} = \rho$, có thể được viết lại là:

$$\frac{MR}{MR - MC} r_{MR} - \frac{MC}{MR - MC} r_{MC} = \rho .$$

Từ đó:

$$r_{MR} = \rho\left(1 - \frac{MC}{MR}\right) + \frac{MC}{MR} r_{MC} \tag{2.221}$$

Tuy nhiên, vì MR và P quan hệ với nhau bởi phương trình:

$$MR = P\left(1 - \frac{1}{E}\right) \tag{2.222}$$

Từ (2.222), ta có thể rút ra một biểu thức khác đối với r_{MR}, cụ thể là:

$$\begin{aligned} r_{MR} &\equiv \frac{1}{MR}\frac{dMR}{dt} = \frac{1}{P(1-1/E)}\left[\left(1 - \frac{1}{E}\right)\frac{dP}{dt} + \frac{P}{E^2}\frac{dE}{dt}\right] \\ &= \frac{dP/dt}{P} + \frac{1}{(1-1/E)E}\frac{dE/dt}{E} = r_P + \frac{1}{E-1} r_E . \end{aligned} \tag{2.223}$$

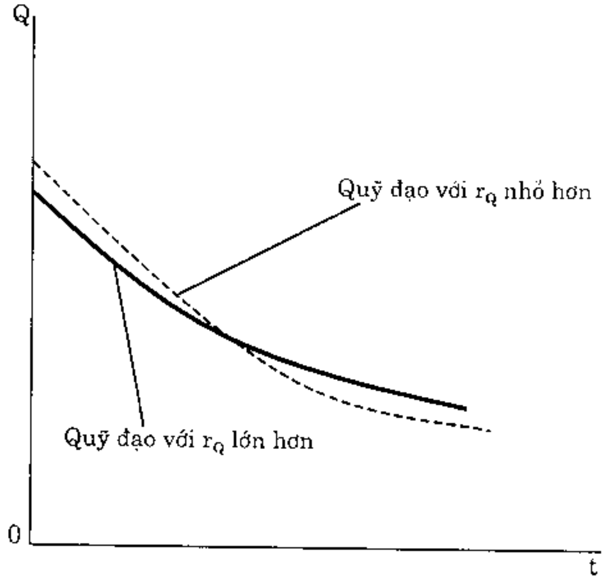
Đặt (2.221) bằng (2.223) và giải để tìm r_P, và sau đó thế vào (2.219), ta được tốc độ tăng của Q trong điều kiện độc quyền:

$$r_{Q_m} = g - E\left[\rho\left(1 - \frac{MC}{MR}\right) + \frac{MC}{MR} r_{MC} - \frac{1}{E-1} r_E\right] \text{ (độc quyền)} \tag{2.224}$$

So sánh (2.224) và (2.220) ta thấy rằng có thể xảy ra trường hợp:

$$r_{Q_S} = r_{Q_m} = g - E\rho \text{ nếu } \quad MC = r_{MC} = r_E = 0 \qquad (2.225)$$

Tình huống MC = 0 xảy ra khi việc khai thác không cần chi phí. Đối với $r_{MC} = 0$, chi phí biên khai thác phải không đổi theo thời gian [$C_{tQ} = 0$ trong (2.217)]. Điều kiện $r_E = 0$ thoả mãn khi độ co giãn của cầu là hằng số theo thời gian. Tập hợp các điều kiện này – cũng được Stiglitz xem xét – là rất chặt, nhưng nếu chúng thoả mãn thì công ty độc quyền sẽ theo đúng con đường khai thác như trường hợp tối ưu xã hội mà không thể nào là bảo tồn môi trường quá mức. Lưu ý rằng số hạng -Eρ là âm và kéo theo sự giảm Q theo thời gian, nếu không được bù lại bởi một giá trị dương đủ lớn của g. Nếu cầu đối với tài nguyên có thể cạn kiệt là dừng (g = 0), hoặc dịch chuyển xuống theo thời gian (g < 0) do chẳng hạn khám phá ra những sản phẩm thay thế, thì r_Q phải âm.



Hình 2.14

Tuy nhiên, một kết cục khác xảy ra khi có một MC dương, bất biến theo đầu ra (MC = k > 0) cũng như bất biến theo thời gian ($r_{MC} = 0$). Vẫn tiếp tục giả thiết rằng $r_E = 0$, ta tìm được:

$$r_{Q_S} = g - E\left[\rho\left(1 - \frac{k}{P}\right)\right] \quad \text{và} \quad r_{Q_m} = g - E\left[\rho\left(1 - \frac{k}{MR}\right)\right] \qquad (2.226)$$

Vì P > MR, suy ra k/P nhỏ hơn k/MR, do đó $r_{Qs} < r_{Qm}$ tại mức bất kỳ của Q. Tối ưu hoá xã hội và công ty độc quyền bây giờ theo các đường đi Q(t) khác nhau. Tuy nhiên, nhớ lại rằng cả hai đường đi phải có cùng tổng diện tích dưới đường cong, cụ thể là S_0. Để thoả mãn ràng buộc này, đường đi Q(t) của công ty độc quyền với giá trị r_Q lớn hơn (thí dụ -0,03 so với -0,05) phải được đặc trưng bằng độ dốc âm ít hơn, như minh hoạ bởi đường liền nét trong Hình 2.14. Vì một đường cong như vậy dẫn đến mức khai thác mới đầu thấp hơn và mức khai thác về sau cao hơn so với đường đứt nét, trong trường hợp hiện tại, công ty độc quyền thực sự tỏ ra là một người bảo vệ môi trường so với tối ưu hoá xã hội. Ở đây chúng ta đã đạt được cùng một kết luận như Stiglitz, mặc dù giả thiết khác nhau.

Tuy nhiên, cũng có thể gặp trường hợp ngược lại, trong đó công ty độc quyền có khuynh hướng tiến hành khai thác quá sớm. Lại giả định rằng MC = r_{Mc} = 0. Nhưng cho độ co giãn E của cầu thay đổi theo tốc độ khai thác Q. Cụ thể hơn, giả sử E'(Q) > 0 – một trường hợp mà Lewis, Matthews và Burness xem xét. Khi đó, khi Q thay đổi theo thời gian, E phải thay đổi theo, cho dù E tự nó không phải là hàm của t. Với các giả thiết này, bây giờ ta có tốc độ tăng khác 0 của E:

$$r_E \equiv \frac{dE/dt}{E} = \frac{E'(Q)(dQ/dt)}{E} = \frac{E'(Q)Q}{E} r_Q \qquad (2.227)$$

Trong phương trình này, lấy r_Q là r_{Qm}, và thế (2.227) vào (2.224), ta được:

$$r_{Q_m} = g - E\rho + \frac{E'(Q)Q}{E-1} r_{Q_m}.$$

Nhóm các số hạng và giải đối với r_{Qm}, cuối cùng ta được:

$$r_{Q_m} = \frac{g - E\rho}{1 - E'(Q)Q/(E-1)} \qquad (2.228)$$

hẳn trái với:

$$r_{Q_s} = g - E\rho \qquad \text{(từ (6.60) với } MC = r_{MC} = 0)$$

Giả sử rằng g - Eρ < 0. Khi đó dễ dàng chỉ ra $r_{Qm} < r_{Qs}$. Và, theo Hình 2.14, công ty độc quyền trong trường hợp này lại chống bảo tồn môi trường. Ta có thể thấy rằng, mẫu số trong (2.228) là một phân số dương khi dMR/dQ < 0. Nhưng doanh thu biên giảm nói chung là một tính chất được thừa nhận của tình huống độc quyền. Do đó, ta có thể thấy từ phân tích hiện tại rằng độc quyền không thể nào đồng nghĩa với chủ nghĩa bảo tồn.

CHƯƠNG III

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU VÀ ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ

A. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU: NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI

Phép tính biến phân là phương pháp cổ điển để giải quyết các bài toán tối ưu động. Nó đòi hỏi tính khả vi của các hàm đưa vào bài toán, hơn nữa nó đòi hỏi nghiệm của bài toán phải là điểm trong. Ở chương này, ta sẽ trình bày phương pháp mới cho phép giải bài toán tối ưu hoá động với những điều kiện rộng rãi hơn. Trong lý thuyết này bài toán tối ưu hoá động được đặt ra dưới dạng bài toán điều khiển tối ưu, ở đây có một số biến được dùng làm công cụ tối ưu hoá gọi là biến điều khiển.

Không giống như phép tính biến phân nhằm tìm ra đường đi tối ưu cho trạng thái y, mục đích hàng đầu của lý thuyết điều khiển tối ưu là xác định đường đi tối ưu cho biến *điều khiển, u*. Tất nhiên, một khi đã tìm thấy đường đi điều khiển tối ưu, $u^*(t)$, chúng ta sẽ tìm thấy đường trạng thái tối ưu, $y^*(t)$, tương ứng. Trên thực tế, các đường đó thường được tìm ra trong cùng một quá trình. Nhưng sự có mặt của biến điều khiển ở vị trí trung tâm làm thay đổi định hướng cơ bản của bài toán tối ưu động.

Có hai câu hỏi được đặt ra. (1) Cái gì làm cho một biến trở thành biến điều khiển? (2) Nó được đưa vào bài toán tối ưu động như thế nào? Để trả lời hai câu hỏi này, chúng ta hãy xem một minh hoạ kinh tế đơn giản. Giả sử một nền kinh tế có một trữ lượng hữu hạn S một tài nguyên có thể cạn kiệt (như than hoặc dầu), như trong mô hình Hotelling, với $S(0) = S_0$. Vì tài nguyên này đang bị khai thác (và sử dụng), nên trữ lượng tài nguyên này sẽ bị giảm theo công thức sau:

$\frac{dS(t)}{dt} = -E(t)$, ở đây E(t) biểu thị tốc độ khai thác tài nguyên ở thời điểm t.

Biến E(t) được coi như một biến điều khiển bởi vì nó có hai tính chất sau. Thứ nhất, nó là biến mà chúng ta có thể lựa chọn tự do theo ý mình. Thứ hai, việc chọn biến E(t) của chúng ta có ảnh hưởng đến biến S(t), biến biểu thị trạng thái của nguồn tài nguyên ở thời điểm bất kỳ. Do đó, biến E(t) giống như bánh lái mà chúng ta có thể dùng để "lái" biến trạng thái S(t) đến các vị trí khác nhau ở thời điểm t bất kỳ theo phương trình vi phân dS/dt = -E(t). Nhờ lái một cách khôn ngoan của biến điều khiển này, chúng ta có thể làm tối ưu một tiêu chuẩn thực hiện nào đó được biểu thị bằng phiếm hàm mục tiêu. Chẳng hạn, chúng ta có thể cho rằng xã hội muốn tối đa hoá tổng lợi ích nhận được từ việc sử dụng nguồn tài nguyên trong một khoảng thời gian cho trước [0, T]. Nếu trữ lượng cuối là tự do (không bị giới hạn), bài toán tối ưu hoá động có thể có dạng như sau:

$$\text{Làm cực đại} \quad \int_0^T U(E)e^{-\rho t}dt$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \frac{dS}{dt} = -E(t)$$

$$\text{và} \quad S(0) = S_0 \quad S(T) \text{ tự do} \quad (S_0, T \text{ cho trước})$$

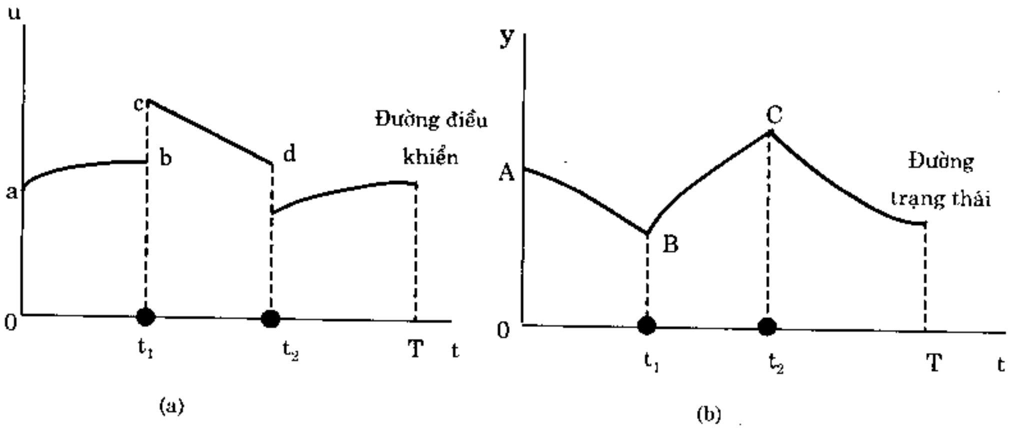
Ở mô hình này, chỉ có biến điều khiển E được đưa vào trong phiếm hàm mục tiêu. Tổng quát hơn, phiếm hàm mục tiêu có thể phụ thuộc vào (các) biến trạng thái cũng như (các) biến điều khiển. Thí dụ này, biến trạng thái S chỉ phụ thuộc vào biến điều khiển E, nhưng nói chung biến trạng thái có thể bị ảnh hưởng bởi (các) biến trạng thái khác và các biến điều khiển, cũng như cả biến t.

Với nền móng này, bây giờ chúng ta bước vào thảo luận về phương pháp điều khiển tối ưu.

I. BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN NHẤT CỦA ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Để đơn giản, đầu tiên chúng ta xét bài toán chỉ có một biến trạng thái y và một biến điều khiển u. Như đã gợi ý ở trên, biến điều khiển là một công cụ cho phép chúng ta tác động lên biến trạng thái. Như vậy, bất cứ đường đi điều khiển u(t) nào được chọn cũng sẽ kéo theo một đường trạng thái y(t)

gắn với nó. Nhiệm vụ của chúng ta là chọn ra đường điều khiển chấp nhận được u*(t), cùng với đường trạng thái chấp nhận được y*(t) gắn với nó, làm tối ưu phiếm hàm mục tiêu trên một khoảng thời gian cho trước [0, T].



Hình 3.1

1.1. Những nét đặc biệt của các bài toán điều khiển tối ưu

Điều đáng chú ý của lý thuyết điều khiển tối ưu là để chấp nhận, quỹ đạo (đường điều khiển) chỉ cần liên tục từng khúc. Điều này có nghĩa là nó được phép có những bước nhảy, như được minh hoạ trong Hình. 3.1a, mặc dù không chấp nhận bước nhảy vô hạn. Một minh hoạ cho sự điều khiển liên tục từng khúc trong đời sống hàng ngày là việc bật tắt công tắc điện. Mỗi khi chúng ta bật (u = 1) và tắt (u = 0), đường đi điều khiển lại trải qua một bước nhảy.

Mặt khác, đường trạng thái y(t) phải liên tục trên toàn bộ khoảng thời gian [0, T]. Nhưng, như minh hoạ trong Hình 3.1b, nó có thể có một số hữu hạn các điểm nhọn hoặc các góc. Điều đó có nghĩa là, để là chấp nhận được, một đường đi trạng thái chỉ cần khả vi từng khúc. Chú ý rằng mỗi điểm nhọn trên đường đi trạng thái đều xảy ra ở thời điểm đường điều khiển thực hiện một bước nhảy. Lý do của sự trùng khớp thời điểm này nằm ở thủ tục tìm nghiệm của bài toán. Một khi chúng ta chọn đoạn đường điều khiển tối ưu đối với khoảng thời gian $[0,t_1)$, chẳng hạn là đường cong *ab* trong Hình 3.1a, thì chúng ta cố gắng xác định đoạn đường đi trạng thái tối ưu tương ứng. Đường đi này có thể là đường cong *AB* trong Hình 3.1b, mà

điểm đầu của nó thoả mãn điều kiện ban đầu đã cho. Với khoảng thời gian tiếp theo, $[t_1, t_2)$, chúng ta lại xác định đoạn đường đi trạng thái tối ưu dựa trên cơ sở đường cong điều khiển tối ưu *cd* tìm được trước đó, nhưng lần này chúng ta phải lấy điểm B như là "điểm đầu" của đoạn đường đi trạng thái tối ưu. Do đó, điểm B vừa là điểm cuối của đoạn thứ nhất, vừa là điểm đầu của đoạn thứ hai của đường đi trạng thái tối ưu. Vì vậy, không thể có sự không liên tục ở B, mặc dù rất có thể xuất hiện một điểm nhọn. Như các đường điều khiển chấp nhận được, các đường trạng thái chấp nhận được phải có một giá trị y xác định với mọi t nằm trong khoảng thời gian [0, T].

Một nét đặc biệt khác rất quan trọng là lý thuyết điều khiển tối ưu có thể xử lý trực tiếp ràng buộc đối với biến điều khiển u, thí dụ như ràng buộc $u(t) \in \mathscr{U}$ với mọi $t \in [0, T]$, ở đây $\mathscr{U}$ ký hiệu một tập hợp điều khiển bị chặn nào đó. Tập hợp điều khiển trên thực tế có thể là một tập hợp lồi đóng, như $u(t) \in [0,1]$. Việc $\mathscr{U}$ có thể là một tập hợp đóng có nghĩa là chấp nhận cả các nghiệm góc (nghiệm biên), đây là điều mới nằm ngoài khuôn khổ cổ điển. Khi đặc điểm này được kết hợp với khả năng có bước nhảy trên đường điều khiển đưa đến một sự kiện thú vị, được gọi là *nghiệm bang-bang*. Giả sử tập hợp điều khiển là $\mathscr{U} = [0, 1]$, nếu giả sử đường điều khiển tối ưu có bước nhảy như sau:

$$\begin{array}{lll} u^*(t) = 1 & \text{với } t \in [0, t_1) & \\ u^*(t) = 0 & \text{với } t \in [t_1, t_2) & (t_1 < t_2) \\ u^*(t) = 1 & \text{với } t \in [t_2, T] & (t_2 < T) \end{array}$$

thì sự điều khiển như thế giống như ta đập vào mặt này cái hòm sắt rồi lại đập vào mặt kia nối tiếp nhau; do đó có tên là "bang-bang".

Cuối cùng, chúng ta để ý rằng bài toán đơn giản nhất trong lý thuyết điều khiển tối ưu, không giống như trong phép tính biến phân, có trạng thái cuối tự do (đường cuối thẳng đứng) chứ không phải một điểm cuối cố định. Lý do chính là như sau: Trong quá trình đi đến điều kiện cấp một cơ bản được gọi là *nguyên lý cực đại*, chúng ta sẽ sử dụng khái niệm một Δu tuỳ ý. Tuy nhiên, bất kỳ một Δu tuỳ ý nào cũng phải kéo theo một Δy tương ứng. Nếu bài toán có một trạng thái cuối cố định, chúng ta cần chú ý xem liệu Δy ấy có dẫn đến trạng thái ấy hay không. Do đó, việc lựa chọn Δu có thể không tuỳ ý một cách hoàn toàn thực sự. Ngược lại, nếu bài toán có một

trạng thái cuối tự do (đường cuối thẳng đứng), thì chúng ta có thể cho Au tuỳ ý ấy dẫn đến bất cứ vị trí nào mà nó có thể và không phải đắn đo về nơi đi tới cuối cùng của y. Điều này làm đơn giản bài toán.

1.2. Bài toán

Dựa trên các thảo luận ở phần trước, chúng ta có thể đặt bài toán đơn giản nhất của điều khiển tối ưu như sau:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T F(t, y, u)dt \qquad (3.1.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = f(t, y, u) \qquad (3.1.2)$$

$$y(0) = A,\ y(T) \ \text{tự do} \ \ (A, T \text{ cho trước}) \qquad (3.1.3)$$

$$\text{và} \qquad u(t) \in \mathcal{U} \qquad \text{với mọi } t \in [0, T] \qquad (3.1.4)$$

Ở đây, cũng như sau này, chúng ta sẽ chỉ làm việc với bài toán cực đại. Bằng cách đó, các điều kiện cần đối với lời giải có thể được phát biểu với nhiều nét đặc thù hơn và ít gây lầm lẫn hơn. Khi gặp một bài toán cực tiểu, chúng ta luôn có thể đưa nó về cực đại bằng cách thêm dấu âm vào trước phiếm hàm mục tiêu. Thí dụ, cực tiểu $\int_0^T F(t, y, u)dt$ tương đương với cực đại $\int_0^T - F(t, y, u)dt$.

Trong (3.1), phiếm hàm mục tiêu vẫn có dạng tích phân xác định, nhưng hàm lấy tích phân F không có đối số y' như trong các phép tính biến phân. Thay vào đó, có một đối số mới u. Sự có mặt của biến điều khiển u đòi hỏi mối liên kết giữa u và y phải được chỉ định, để cho ta biết rằng u sẽ ảnh hưởng một cách cụ thể như thế nào tới đường đi của biến trạng thái y. Thông tin cho bởi phương trình $\dot{y} = f(t, y, u)$, trong đó $\dot{y}$ biểu thị đạo hàm theo thời gian của y, dy/dt, là cách ký hiệu khác của ký hiệu y'. Tại thời điểm khởi đầu, hai đối số đầu tiên trong hàm f phải được lấy giá trị cho trước t = 0 và y(0) = A, như thế chỉ có đối số thứ 3 là tuỳ cho chúng ta chọn. Đối với một giá trị u được chọn ở t = 0, chẳng hạn $u_1(0)$, phương trình này sẽ cho một giá trị cụ thể của $\dot{y}$, Thí dụ $\dot{y}_1(0)$, giá trị này quy định hướng di chuyển cụ thể của biến y. Một giá trị khác, $u_2(0)$ nói chung sẽ cho ta một giá

trị khác, $\dot{y}_2(0)$, qua hàm f. Và một lập luận tương tự có thể áp dụng với các thời điểm khác. Như vậy, phương trình này cung cấp một cơ chế mà với nó việc chọn lựa biến điều khiển u, ta có thể chuyển thành một kiểu di chuyển cụ thể của biến trạng thái y. Do đó, phương trình này được gọi là *phương trình chuyển động* của biến trạng thái (hay gọi tắt là *phương trình trạng thái*). Thông thường, liên hệ giữa u và y có thể được mô tả thích hợp bằng một phương trình vi phân cấp một $\dot{y} = f(t, y, u)$. Tuy nhiên, nếu kiểu biến thiên của biến trạng thái y không thể thâu tóm bằng đạo hàm bậc nhất $\dot{y}$ mà cần sử dụng đạo hàm bậc hai $\ddot{y} \equiv d^2y/dt^2$, thì phương trình trạng thái sẽ có dạng phương trình vi phân cấp 2, mà chúng ta phải đưa về một cặp phương trình vi phân cấp 1. Rắc rối là, trong quá trình này, chúng ta phải thêm một biến trạng thái vào bài toán.

Chúng ta sử dụng chữ f để ký hiệu hàm số trong phương trình chuyển động, và sử dụng chữ F để chỉ hàm dưới dấu tích phân trong phiếm hàm mục tiêu. Cả hai hàm F và f đều được giả thiết là liên tục theo tất cả các đối số của chúng, và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục đối với t và y, nhưng không cần thiết phải đối với u.

Phần còn lại của bài toán (3.1) bao gồm việc cho các điều kiện biên và các tập hợp điều khiển. Ngoài cách cho trước đường cuối thẳng là đơn giản nhất, cũng có thể xét cách cho trước các điểm cuối. Về phần tập hợp điều khiển, trường hợp đơn giản nhất là cho tập hợp mở $\mathcal{U} = (-\infty, +\infty)$. Nếu như vậy, sự lựa chọn u sẽ không bị ràng buộc,và ta không cần phải nêu lên $u(t) \in \mathcal{U}$ khi giải bài toán.

1.3. Một trường hợp đặc biệt

Xét bài toán trong đó sự lựa chọn u không bị ràng buộc, và phương trình chuyển động có dạng đơn giản:

$$\dot{y} = u.$$

Khi đó bài toán điều khiển tối ưu trở thành:

$$\text{Làm cực đại} \quad V = \int_0^T F(t, y, u)dt \tag{3.2.1}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = u \tag{3.2.2}$$

và $y(0) = A$, $y(T)$ tự do, (A,T cho trước) (3.2.3)

Bằng cách thay u bởi $\dot{y}$ trong hàm lấy tích phân, chúng ta viết lại bài toán như sau:

$$\text{Làm cực đại} \quad V = \int_0^T F(t, y, \dot{y})dt \tag{3.2'}$$

với ràng buộc $y(0) = A$, $y(T)$ tự do, (A,T cho trước)

Đây đúng là bài toán biến phân với đường cuối thẳng đứng. Mối liên quan căn bản giữa phép tính biến phân và lý thuyết điều khiển tối ưu là rõ ràng. Nhưng các phương trình chuyển động gặp trong các bài toán điều khiển tối ưu nói chung phức tạp hơn nhiều so với trong (3.2).

II. NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI

Kết quả quan trọng nhất trong lý thuyết điều khiển tối ưu là điều kiện cần cấp một cho lời giải của bài toán và được gọi là nguyên lý cực đại. Thuật ngữ này được nhà toán học Nga L. S. Pontryagin và các cộng sự của ông đặt ra. Nguyên lý cực đại được phát biểu dựa trên khái niệm hàm Hamilton và biến hiệp trạng thái.

2.1. Biến hiệp trạng thái và hàm Hamilton

Có ba loại biến đã được trình bày trong phát biểu bài toán (3.1): t (thời gian), y (trạng thái), và u (điều khiển). Trong quá trình giải còn một loại biến khác xuất hiện. Nó được gọi là *biến hiệp trạng thái* (hay *biến phụ*) ký hiệu là λ. Như ta sẽ thấy, biến hiệp trạng thái na ná như nhân tử Lagrange, và vì vậy, về bản chất nó đóng vai trò "giá bóng" để đánh giá tầm quan trọng của biến trạng thái đối với mục tiêu cực đại. Giống như y và u, biến λ có thể lấy các giá trị khác nhau tại các thời điểm khác nhau. Như vậy, ký hiệu λ thực tế là viết tắt của $\lambda(t)$.

Biến hiệp trạng thái được đưa vào bài toán điều khiển tối ưu thông qua *hàm Hamilton* hay gọi tắt là *Hamilton*, có vai trò nổi bật trong quá trình giải. Ký hiệu bằng H, Hamilton được định nghĩa là:

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t)\, f(t, y, u) \tag{3.3}$$

H là hàm của bốn đối số: t, y, u và λ. Lưu ý rằng, trong (3.3), ta đã gán hệ số 1 cho F, $\lambda(t)$ cho f. Nói một cách chặt chẽ, Hamilton phải được viết lại là:

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv \lambda_0 F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u) \qquad (3.4)$$

ở đây λ_0 là một hằng số không âm, cũng chưa xác định. Tuy nhiên, trên thực tế, tình huống λ_0 bằng 0 xảy ra chỉ trong những hoàn cảnh không bình thường nào đó mà lời giải của bài toán thực sự độc lập với hàm lấy tích phân F, nghĩa là, hàm F không có ảnh hưởng gì đối với quá trình giải. Hầu hết các bài toán gặp trong kinh tế học là những bài toán mà hàm F có ảnh hưởng, do đó các nhà kinh tế giả thiết $\lambda_0 > 0$, rồi chuẩn hoá nó bằng 1.

2.2. Nguyên lý cực đại

Khác với phương trình Euler, là một phương trình vi phân cấp hai của biến trạng thái y, nguyên lý cực đại gồm hai phương trình vi phân cấp một của biến trạng thái y và biến hiệp trạng thái λ. Ngoài ra nguyên lý cực đại còn có một đòi hỏi nữa là Hamilton được cực đại theo biến điều khiển u tại mọi thời điểm. Để dễ hiểu, đầu tiên ta sẽ phát biểu và thảo luận các điều kiện có liên quan, trước khi trình bày cơ sở hợp lý của nguyên lý cực đại.

Đối với bài toán trong (3.1), và với Hamilton định nghĩa trong (3.3), các điều kiện của nguyên lý cực đại là:

$$\underset{u}{Max}\ H(t,y,u,\lambda) \quad \text{đối với mọi } t \in [0, T] \qquad (3.5.1)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{(phương trình chuyển động đối với y)} \qquad (3.5.2)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{(phương trình chuyển động đối với } \lambda\text{),} \qquad (3.53)$$

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{(điều kiện hoành)} \qquad (3.5.4)$$

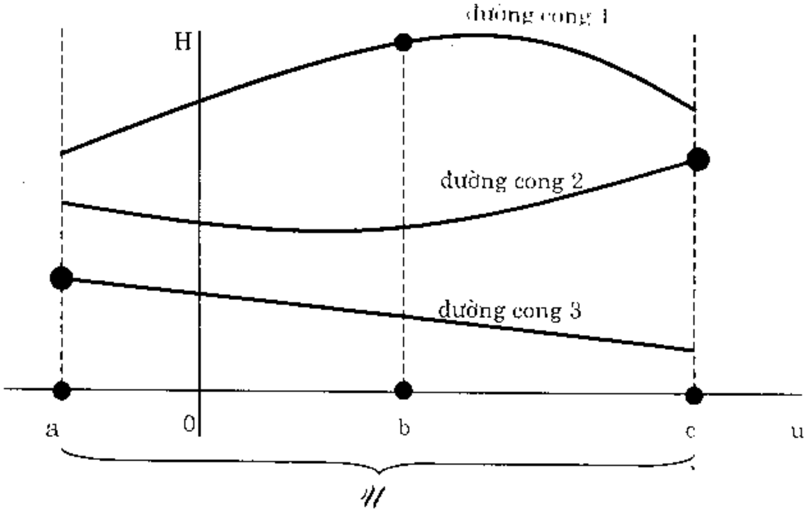
Ký hiệu $\underset{u}{Max} H$ *nghĩa là Hamilton được cực đại theo riêng u với tư cách là biến lựa chọn. Một cách tương đương để biểu thị điều kiện này là:*

$$H(t,y,u^*,\lambda) \geq H(t,y,u,\lambda) \quad \text{đối với mọi } t \in [0,T] \qquad (3.6)$$

ở đây u* là điều khiển tối ưu, và u là một giá trị điều khiển bất kỳ khác. Sau này, để đơn giản, đôi khi ta sẽ sử dụng ký hiệu ngắn hơn "Max H" để chỉ đòi hỏi này mà không đả động đến u dưới dạng hiển. Ta sẽ nhận thấy rằng chính đòi hỏi cực đại H theo u này đã sinh tên gọi "nguyên lý cực đại".

Mới đầu có thể nghĩ rằng đòi hỏi rằng trong (3.6) được thể hiện cô đọng hơn trong điều kiện cấp một $\partial H/\partial u = 0$ (khi đưa thêm một điều kiện

cấp hai thích hợp). Sự thật, đòi hỏi $\underset{u}{\text{Max}}H$ là điều kiện rộng hơn nhiều so với đòi hỏi này.



Hình 3.2

Trong Hình 3.2, ta vẽ ba đường cong, mỗi đường biểu thị một dạng có thể của Hamilton H theo biến điều khiển u tại một thời điểm cụ thể, với các giá trị cụ thể của y và λ. Miền điều khiển được giả định là khoảng đóng [a, c]. Đối với đường cong 1, khả vi theo u, cực đại của H xảy ra tại u = b, một điểm trong của miền điều khiển $\mathscr{U}$; trong trường hợp này, phương trình $\partial H/\partial u = 0$ có thể dùng để xác định điều khiển tối ưu tại thời điểm đó. Nhưng nếu H có dạng đường cong 2 thì điều khiển trong $\mathscr{U}$ làm cực đại H lại tại u = c, một điểm biên của $\mathscr{U}$. Như vậy, điều kiện $\partial H/\partial u = 0$ không áp dụng được, cho dù đường cong là khả vi. Và trong trường hợp đường cong 3, với Hamilton tuyến tính theo u, cực đại của H xảy ra tại u = a, một điểm biên khác, và điều kiện $\partial H/\partial u = 0$ một lần nữa lại không áp dụng được bởi vì không ở đâu đạo hàm này bằng 0. Do đó cần có một phát biểu rộng hơn $\underset{u}{\text{Max}}H$. Thực tế, trong nguyên lý cực đại, thậm chí không đòi hỏi Hamilton khả vi theo u.

Trường hợp Hamilton tuyến tính theo u đáng đặc biệt quan tâm. Một là, khi đó H có đồ thị theo u như một đường thẳng và điều khiển tối ưu luôn luôn tìm được tại một biên của u. (Nếu H là một đường thẳng nằm ngang,

thì không có điều khiển tối ưu duy nhất nào). Quan trọng hơn, trường hợp này là một Thí dụ về tình huống hóc búa trong phép tính biến phân mà bây giờ có thể trở nên dễ dàng giải quyết trong lý thuyết điều khiển tối ưu. Trong phép tính biến phân, bất cứ khi nào hàm lấy tích phân là tuyến tính theo y', dẫn đến $F_{y'y'} = 0$, phương trình Euler có thể không mang lại một nghiệm thoả mãn các điều kiện biên đã cho. Trái lại, trong lý thuyết điều khiển tối ưu, trường hợp này không có vấn đề gì.

Ta nhận xét rằng điều kiện $\dot{y} = \partial H / \partial \lambda$ không là cái gì khác ngoài việc nhắc lại phương trình chuyển động đối với biến trạng thái đã nêu ra trong (3.1). Biểu diễn lại $\dot{y}$ như một đạo hàm riêng của H theo biến hiệp trạng thái λ chỉ là để chỉ ra tính đối xứng giữa phương trình chuyển động này và phương trình chuyển động của biến trạng thái với phương trình chuyển động của biến hiệp trạng thái. Tuy nhiên, lưu ý rằng trong phương trình chuyển động đối với biến hiệp trạng thái, $\dot{\lambda}$ là *đối* của đạo hàm riêng của H theo biến trạng thái y. Hai phương trình chuyển động được gọi gộp chung là *hệ Hamilton*, hay *hệ chính tắc*. Tuy có nhiều phương trình vi phân phải giải trong lý thuyết điều khiển tối ưu – một phương trình cho mỗi biến trạng thái và mỗi biến điều khiển – nhưng chúng đều là phương trình vi phân cấp một. Vì biến điều khiển không bao giờ xuất hiện ở dạng đạo hàm, không có phương trình vi phân nào đối với u trong hệ Hamilton. Nhưng từ nghiệm cơ bản của (3.5), nếu muốn, ta có thể rút ra một phương trình vi phân đối với biến điều khiển. Và, trong một số mô hình, có thể là thuận tiện hơn khi làm việc với một hệ thống động theo các biến (y,u) thay cho hệ chính tắc theo các biến (y, λ).

Điều kiện cuối cùng trong (3.5) là điều kiện hoành đối với bài toán trạng thái cuối tự do – bài toán với một đường cuối thẳng đứng. Như ta mong đợi, điều kiện như vậy chỉ liên quan tới điều phải xảy ra tại thời gian cuối T.

2.3. Thủ tục áp dụng nguyên lý cực đại trong thực hành

Trong mục này ta sẽ trình bày các bước tìm điều khiển tối ưu theo nguyên lý cực đại qua các ví dụ sau:

Thí dụ 1. Hãy tìm đường cong có khoảng cách ngắn nhất từ một điểm đã cho P tới một đường thẳng cho trước L. Ta đã gặp bài toán này trước đây

trong phép tính biến phân. Để phát biểu lại nó như một bài toán điều khiển tối ưu, hãy xem P là (0, A) và giả sử, không mất tính tổng quát, rằng đường thẳng L là một đường thẳng đứng. (Nếu vị trí đã cho của L không thẳng đứng, nó luôn luôn có thể làm cho trở thành thẳng đứng bằng một phép quay thích hợp các trục toạ độ.) Hàm F sử dụng trước đây, $(1 + y'^2)^{1/2}$ có thể được viết lại là $(1 + u^2)^{1/2}$, với điều kiện ta đặt $\dot{y} = u$ (hay $y' = u$). Và, để chuyển bài toán cực tiểu khoảng cách về bài toán cực đại, ta phải gán dấu trừ cho hàm lấy tích phân cũ. Khi đó, bài toán của chúng ta là:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T -\left(1 + u^2\right)^{1/2} dt \tag{3.7.1}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = u \tag{3.7.2}$$

$$\text{và} \qquad y(0) = A, \quad y(T) \text{ tự do}, \ (A, T \text{ cho trước}) \tag{3.7.3}$$

Vì biến điều khiển không bị ràng buộc, nên điều khiển tối ưu sẽ là một nghiệm trong.

Thủ tục giải bài toán này như sau:

Bước I. Ta bắt đầu bằng việc xây dựng hàm Hamilton:

$$H = -(1 + u^2)^{1/2} + \lambda u \tag{3.8}$$

Do H là khả vi và phi tuyến, ta có thể áp dụng điều kiện cấp một đối với cực trị để thu được:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2}\left(1 + u^2\right)^{-1/2}(2u) + \lambda = 0$$

Phương trình này cho ta nghiệm:

$$u(t) = \lambda\left(1 - \lambda^2\right)^{-1/2} \tag{3.9}$$

Tiếp tục vi phân $\frac{\partial H}{\partial u}$ theo u, cho ta:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -\left(1 + u^2\right)^{-3/2} < 0\,.$$

Như vậy, kết quả trong (3.9) làm cực đại H. Tuy nhiên, vì (3.9) biểu thị u theo λ, bây giờ ta phải tìm một nghiệm đối với λ.

Bước II. Để làm việc đó, ta dựa vào phương trình chuyển động đối với biến hiệp trạng thái $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial y$ trong (3.5). Trong (3.8) biểu thức của H không chứa y, ta có:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \lambda(t) = \text{hằng số} \tag{3.10}$$

Điều kiện hoành $\lambda(T) = 0$ trong (3.5) là đủ để xác định hằng số. Vì nếu λ là một hằng số, thì giá trị tại t = T cũng là giá trị của nó đối với mọi t. Như vậy,

$$\lambda^*(t) = 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0,T] \tag{3.10'}$$

Theo (3.9), ta có thể kết luận rằng:

$$u^*(t) = 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0,T] \tag{3.11}$$

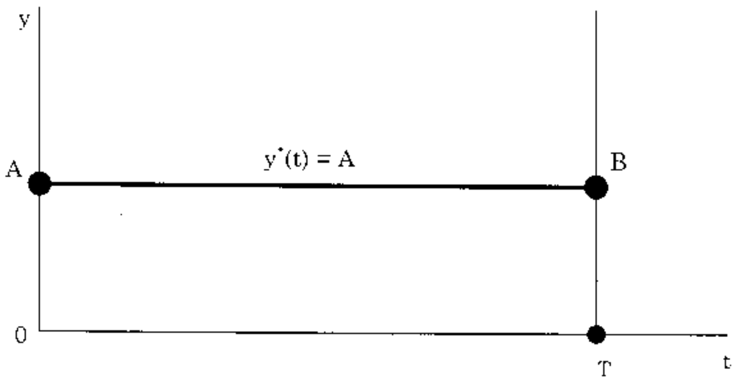
Bước III. Từ phương trình chuyển động $\dot{y} = u$, ta có thể viết:

$$\dot{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \text{hằng số} \tag{3.12}$$

Hơn nữa, điều kiện đầu y(0) = A giúp ta xác định hằng số này và viết:

$$y^*(t) = A \tag{3.12'}$$

Đường đi y* này được minh hoạ trong Hình 3.3, là một đường thẳng nằm ngang.



Hình 3.3

Thí dụ 2. Tìm điều khiển tối ưu:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^2 (2y - 3u)\,dt \tag{3.13.1}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = y + u \tag{3.12.2}$$

$$y(0) = 4 \qquad y(2) \text{ tự do} \tag{3.13.3}$$

$$\text{và} \qquad u(t) \in \mathcal{U} = [0,2] \tag{3.13.4}$$

Trong bài toán này các hàm dưới dấu tích phân và phương trình chuyển động là các hàm tuyến tính theo u và tập hợp điều khiển là tập đóng, ta có thể kỳ vọng xảy ra nghiệm biên.

Bước I. Thiết lập hàm Hamilton của (3.13), tức là:

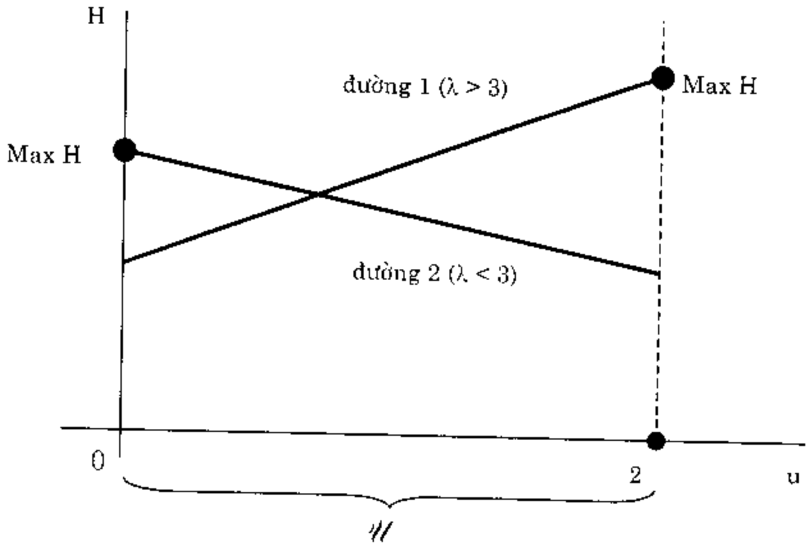
$$H = 2y - 3u + \lambda\,(y + u) = (2 + \lambda)\,y + (\lambda - 3)\,u.$$

Hàm này tuyến tính theo u, với độ dốc $\partial H/\partial u = \lambda - 3$. Vì chỉ cần xét H biến thiên theo u, nếu tại một thời điểm đã cho, ta tìm được $\lambda > 3$, thì H sẽ là một đường cong dốc lên giống đường 1 trong Hình 3.4; để cực đại H, ta phải chọn $u^* = 2$. Mặt khác, nếu $\lambda < 3$ thì sẽ là đường 2, và khi đó ta phải chọn $u^* = 0$. Tóm lại:

$$u^*(t) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{nếu} \quad \lambda(t) \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 3 \tag{3.14}$$

Tất nhiên, cả $u^* = 2$ lẫn $u^* = 0$ là các nghiệm biên. Ta thấy ở đây H là tuyến tính theo u, các điều kiện cấp một thông thường $\partial H/\partial u = 0$ không áp dụng được trong việc tìm u^*.

Bước II. Nhiệm vụ tiếp theo của chúng ta là xác định $\lambda(t)$.



Hình 3.4

Từ phương trình chuyển động đối với λ, ta có phương trình vi phân:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -2 - \lambda \qquad \text{hay} \qquad \dot{\lambda} + \lambda = -2$$

Nghiệm tổng quát của nó là:

$$\lambda(t) = ke^{-t} - 2 \qquad \text{(k tuỳ ý)}$$

Vì hằng số tuỳ ý k có thể được xác định là $k = 2e^2$, bằng cách sử dụng điều kiện hoành $\lambda(T) = \lambda(2) = 0$, thì nghiệm riêng là:

$$\lambda^*(t) = 2e^2e^{-t} - 2 = 2e^{2-t} - 2 \qquad (3.15)$$

Ta thấy rằng $\lambda^*(t)$ giảm ổn định từ một giá trị đầu $\lambda^*(0) = 2e^2 - 2 \approx 12{,}778$ xuống giá trị cuối $\lambda^*(2) = 2 - 2 = 0$. Như vậy, λ^* lúc đầu lớn hơn 3, nhưng về sau giảm xuống nhỏ hơn 3. Ta có thể tìm được thời điểm tới hạn, khi $\lambda = 3$ và ở thời điểm đó điều khiển tối ưu phải chuyển từ $u^* = 2$ sang $u^* = 0$, bằng cách đặt $\lambda^*(t) = 3$ trong (3.15) và giải đối với t. Ký hiệu thời điểm cụ thể đó bằng τ, ta có:

$$\tau = 2 - \ln 2{,}5 \approx 1{,}08 \qquad (3.16)$$

Do đó, điều khiển tối ưu trong (3.14) có thể phát biểu lại cụ thể hơn theo hai pha là:

$$\begin{array}{ll} \text{Pha I:} & u^*_{I} \equiv u^*[0,\tau) = 2 \\ \text{Pha II:} & u^*_{II} \equiv u^*[\tau,2] = 0 \end{array} \qquad (3.17)$$

Như được biểu diễn bằng đồ thị trong Hình 3.5a, điều khiển tối ưu này là một thí dụ về điều khiển kiểu bang-bang.

Bước III. Mặc dù bài toán chỉ đòi hỏi tìm điều khiển tối ưu, ta có thể tìm đường trạng thái tối ưu trong hai pha. Trong pha I, phương trình chuyển động đối với y là $\dot{y} = y + u = y + 2$, hay:

$$\dot{y} - y = 2 \qquad \text{với giá trị đầu } y(0) = 4$$

Nghiệm của nó là:

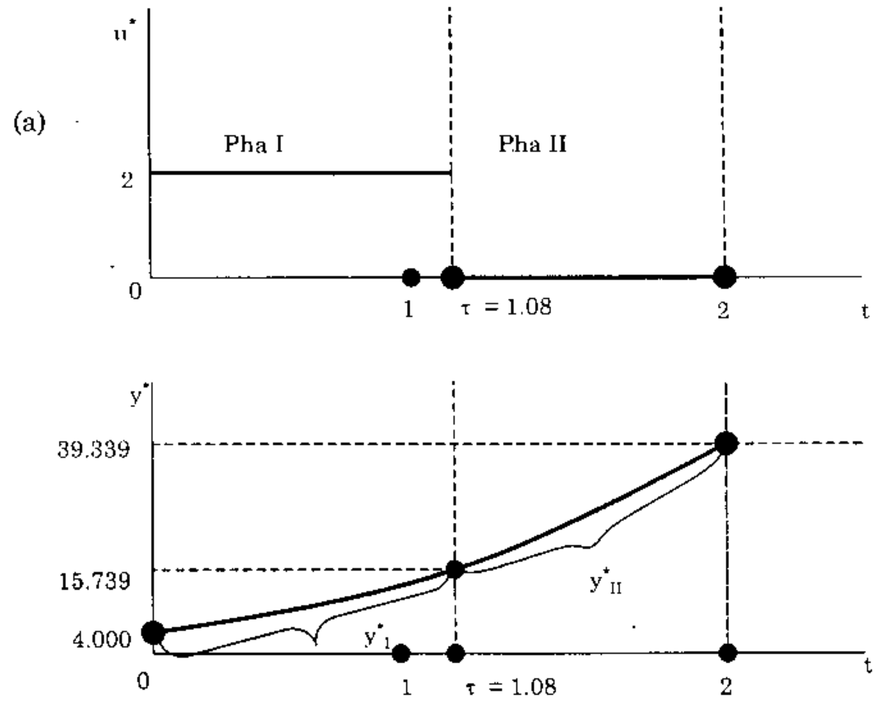
$$y^*_I \equiv y^*[0,\tau) = 2(3e^t - 1) \qquad (3.18)$$

Trong pha II, phương trình chuyển động đối với y là $\dot{y} = y + 0$, hay:

$$\dot{y} - y = 0$$

với nghiệm tổng quát:

$$y^*_{II} \equiv y^*[\tau, 2] = ce^t \qquad \text{(c tuỳ ý)} \qquad (3.19)$$



Hình 3.5

Ở đây c không thể được xác định bởi điều kiện đầu y(0) = 4 cho trong (3.13) bởi vì ta đã ở pha II, vượt quá t = 0. Nó cũng không được xác định bởi bất cứ điều kiện cuối nào bởi vì trạng thái cuối là tự do. Tuy nhiên, ta nhớ lại rằng quỹ đạo y tối ưu đòi hỏi phải là liên tục, như minh hoạ trong Hình 3.1b. Do đó, giá trị đầu của y^*_{II} phải đặt bằng giá trị của y^*_I lấy tại τ. Bởi vì:

$$y^*_I(\tau) = 2(3e^{\tau} - 1) \qquad \text{(theo (3.18))}$$

và

$$y^*_{II}(\tau) = ce^{\tau} \qquad \text{(theo (3.18))}$$

bằng cách đặt hai biểu thức này bằng nhau và giải đối với c, ta tìm được $c = 2(3 - e^{-\tau})$, do đó đường đi tối ưu y trong pha II là:

$$y^*_{II} = 2(3-e^{-\tau})e^{t} \approx 5,32\, e^{t} \qquad \text{(c tuỳ ý)} \qquad (3.19')$$

Giá trị của y* tại thời điểm chuyển hướng xấp xỉ bằng $2(3e^{1.096} - 1) = 15,74$.

Bằng cách kết nối hai đường đi (3.18) và (3.19'), ta thu được toàn bộ đường đi y* đối với khoảng thời gian [0,2], như chỉ ra trong Hình 3.5b. Trong thí dụ cụ thể này, đường đi kết nối này ngẫu nhiên trông giống một đường cong mũ, nhưng thực tế hai đoạn này là những phần của hai hàm mũ riêng rẽ.

III. NỀN TẢNG HỢP LÝ CỦA NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI

Bây giờ ta sẽ giải thích nền tảng hợp lý cho nguyên lý cực đại. Chúng ta sẽ không có ý định đưa ra một chứng minh chi tiết – chứng minh đầy đủ do Pontryagin và các cộng sự của ông đưa ra – ở đây ta chỉ trình bày một cách nhìn nhận khác về bài toán, để làm cho nguyên lý cực đại có thể tin cậy được. Điều này về sau sẽ tăng sức mạnh khi ta so sánh nguyên lý cực đại với phương trình Euler và các điều kiện khác của phép tính biến phân.

3.1. Một cách nhìn khác về bài toán điều khiển

Để đơn giản, ở đây ta giả thiết biến điều khiển u không bị ràng buộc, nên u* là một nghiệm trong. Thêm nữa, hàm Hamilton được giả thiết là khả vi theo u, và điều kiện $\partial H/\partial u = 0$ có thể được sử dụng thay cho điều kiện "$\max_u H$". Như thường lệ, ta lấy điểm đầu là cố định, nhưng điểm cuối cho phép thay đổi. Điều này sẽ giúp ta rút ra các điều kiện hoành nào đó trong quá trình thảo luận. Khi đó bài toán là:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T F(t, y, u)\, dt \qquad (3.20.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \qquad \dot{y} = f(t, y, u) \qquad (3.20.2)$$

$$\text{và} \qquad y(0) = y_0 \text{ (cho trước)} \qquad (3.20.3)$$

3.2. Thủ tục rút ra điều kiện hoành

Bước I. Như bước đầu tiên để đi đến nguyên lý cực đại, ta hãy kết hợp phương trình chuyển động vào phiếm hàm mục tiêu, và biểu diễn lại phiếm hàm theo Hamilton.

Ta thấy rằng, nếu biến y luôn luôn tuân theo phương trình chuyển động, thì biểu thức $[f(t, y, u) - \dot{y}]$ sẽ chắc chắn lấy giá trị 0 đối với mọi t trong khoảng [0, T]. Như vậy, sử dụng khái niệm nhân tử Lagrange, với mỗi giá trị của t ta có thể tạo ra biểu thức $\lambda(t)[f(t, y, u) - \dot{y}]$, vẫn nhận giá trị 0. Lấy tổng $\lambda(t)[f(t, y, u) - \dot{y}]$ theo t trong thời kỳ [0, T] vẫn cho ta giá trị 0:

$$\int_0^T \lambda(t)[f(t,y,u) - \dot{y}]\, dt = 0 \tag{3.21}$$

Do đó, ta có thể cộng thêm tích phân trong (3.21) vào phiếm hàm mục tiêu cũ mà không ảnh hưởng đến lời giải. Nghĩa là, ta có thể làm việc với phiếm hàm mục tiêu mới:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\equiv V + \int_0^T \lambda(t)[f(t,y,u) - \dot{y}]\, dt \\ &= \int_0^T \{F(t,y,u) + \lambda(t)[f(t,y,u) - \dot{y}]\}\, dt \end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó hàm dưới dấu tích phân là hàm Lagrange. Ta thấy $\mathcal{V}$ có cùng một giá trị như V, chừng nào phương trình chuyển động trong (3.20) được nghiệm đúng qua suốt thời gian.

Thay hàm Hamilton:

$$H(t,y,u) \equiv F(t,y,u) + \lambda(t)\, f(t,y,u)$$

vào (3. 22), khi đó phiếm hàm mới trở nên:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_0^T [H(t,y,u,\lambda) - \lambda(t)\dot{y}]\, dt \\ &= \int_0^T H(t,y,u,\lambda)\, dt - \int_0^T \lambda(t)\dot{y}\, dt \end{aligned} \tag{3.22'}$$

Điều quan trọng là có sự phân biệt rõ ràng giữa một bên là số hạng thứ hai trong Hamilton, $\lambda(t)\ f(t,y,u)$ và bên kia là biểu thức nhân tử Lagrange $\lambda(t)[f(t,y,u) - \dot{y}]$. Biểu thức sau có chứa $\dot{y}$ dưới dạng hiển, còn biểu thức đầu thì không. Bằng cách lấy tích phân từng phần, ta có:

$$-\int_0^T \lambda(t)\dot{y}\, dt = -\lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 + \int_0^T y(t)\dot{\lambda}\, dt$$

Dùng kết quả này ta viết lại phiếm hàm mục tiêu mới là:

$$\mathcal{V} = \underbrace{\int_0^T [H(t,y,u,\lambda) + y(t)\dot{\lambda}]\, dt}_{\Omega_1} - \underbrace{\lambda(T)y_T}_{\Omega_2} + \underbrace{\lambda(0)y_0}_{\Omega_3} \tag{3.22''}$$

Biểu thức $\mathcal{V}$ chứa ba số hạng thành phần cộng tính Ω_1, Ω_2, Ω_3. Lưu ý rằng trong khi số hạng Ω_1 là tích phân trải ra trên toàn bộ kỳ kế hoạch [0, T], số hạng Ω_2 chỉ liên quan tới thời gian cuối và Ω_3 chỉ liên quan tới thời gian đầu.

Bước II. Giá trị của $\mathcal{V}$ phụ thuộc vào đường đi theo thời gian được chọn đối với ba biến y, u và λ, cũng như phụ thuộc các giá trị được chọn đối với T và y_T. Trong bước này, ta sẽ tập trung vào λ.

Biến λ là nhân tử Lagrange, khác căn bản với u và y, vì việc chọn đường đi λ(t) sẽ không gây ảnh hưởng nào đối với giá trị của $\mathcal{V}$, chừng nào phương trình chuyển động $\dot{y} = f(t, y, u)$ còn đúng, nghĩa là chừng nào mà:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad \text{với mọi } t \in [0, T] \tag{3.23}$$

Cho nên, để làm mất ảnh hưởng của λ(t) đối với $\mathcal{V}$, ta buộc lời giải phải thoả mãn (3.23) như một điều kiện cần. Đây là một trong ba điều kiện của nguyên lý cực đại.

Bước III. Bây giờ ta chuyển sang đường đi u(t) và ảnh hưởng của nó đối với đường đi y(t). Nếu đường đi tốt nhất u*(t) đã biết, và nếu ta làm xao động nó bởi một đường cong xao động p(t), ta có thể sinh ra các đường đi điều khiển "ở lân cận" đó là:

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon\, p(t) \tag{3.24}$$

mỗi giá trị của ε cho ta một đường. Nhưng do phương trình chuyển động $\dot{y} = f(t, y, u)$, mỗi ε cũng sẽ làm xao động đường đi y*(t). Các đường đi y sinh ra ở lân cận mà có thể viết là:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon\, q(t) \tag{3.25}$$

Thêm nữa, nếu T và y_T có thể thay đổi, ta cũng có:

$$T = T^* + \varepsilon\, \Delta T \quad \text{và} \quad y_T = y_T^* + \varepsilon\, \Delta y_T \tag{3.26}$$

$$\left(\text{kéo theo } \frac{dT}{d\varepsilon} = \Delta T \text{ và } \frac{dy_T}{d\varepsilon} = \Delta y_T\right)$$

Từ các biểu thức u và y trong (3.24) và (3.25), ta có thể biểu diễn $\mathcal{V}$ theo ε, nên ta lại có thể áp dụng điều kiện cấp một $d\mathcal{V}/d\varepsilon = 0$. Dạng mới của $\mathcal{V}$ là:

$$\mathcal{V} = \int_0^{T(\varepsilon)} \left\{H[t, y^* + \varepsilon q(t), u^* + \varepsilon p(t), \lambda] + \dot{\lambda}[y^* + \varepsilon q(t)]\right\} dt$$
$$- \lambda(T) y_T + \lambda(0) y_0 \tag{3.27}$$

Bước IV. Bây giờ ta áp dụng điều kiện $d\mathcal{V}/d\varepsilon = 0$. Bằng cách lấy đạo hàm $\mathcal{V}$ theo ε thì đạo hàm của số hạng tích phân trong (3.27) là:

$$\int_0^{T(\varepsilon)} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] + \dot{\lambda} q(t) \right\} dt + \left[H + \dot{\lambda} y \right]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon} \tag{3.28}$$

Đạo hàm của số hạng thứ hai trong (3.27) theo ε là:

$$-\lambda(T)\frac{dy_T}{d\varepsilon} - y_T \frac{d\lambda(T)}{dT}\frac{dT}{d\varepsilon} = -\lambda(T)\Delta y_T - y_T \dot{\lambda}(T)\Delta T$$

$$\text{(theo (3.26))} \tag{3.29}$$

Số hạng $\lambda(0)y_0$ trong (3.27) là hằng số, có đạo hàm bằng không. Như vậy $d\mathcal{V}/d\varepsilon$ là tổng của (3.28) và (3.29). Khi cộng hai biểu thức này, ta để ý rằng một thành phần của (3.28) có thể viết như sau:

$$\left[\dot{\lambda} y\right]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon} = \dot{\lambda}(T) y_T \Delta T \qquad \text{(theo (3.26))}$$

Như vậy, khi đặt tổng của (3.28) và (3.29) bằng 0, điều kiện cấp một, sau khi sắp xếp lại, trở thành:

$$d\mathcal{V}/d\varepsilon = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda} \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] dt \tag{3.30}$$

$$+ \left[H\right]_{t=T} \Delta T - \lambda(T)\Delta y_T = 0$$

Ba thành phần của đạo hàm này có liên quan đến những cái tuỳ ý khác nhau: Tích phân chứa các đường cong xao động tuỳ ý p(t) và q(t), còn hai thành phần kia tương ứng chứa các ΔT và Δy_T tuỳ ý. Dó đó, từng thành phần trong ba thành phần này phải được đặt bằng 0 để thoả mãn (3.30). Bằng cách đặt thành phần tích phân bằng 0, ta có hai điều kiện:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \text{và} \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Điều kiện thứ nhất cho ta *phương trình chuyển động* đối với biến hiệp trạng thái λ. Điều kiện thứ hai biểu thị dạng hẹp yếu hơn của điều kiện "$\max_u H$" – Hẹp hơn vì như ta đã nhận xét ở mục trên, nó không bao gồm được trường hợp bài toán có nghiệm biên. Vì bài toán đơn giản nhất có một t

cố định và y_T tự do, số hạng ΔT trong (3.30) tự động bằng 0, nhưng Δy_T thì không. Để làm cho biểu thức $-\lambda(T)\Delta y_T$ triệt tiêu, ta phải đặt ràng buộc:

$$\lambda(T) = 0$$

Điều này giải thích cho điều kiện hoành (3.5.4) trong (3.5).

Ta thấy rằng, như đã nói ở bước II, điều kiện $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ làm mất ảnh hưởng của λ đối với giá trị của phiếm hàm mục tiêu. Nhưng trong nguyên lý cực đại nó không được chọn tuỳ ý, mà đòi hỏi phải tuân theo phương trình chuyển động $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}$ và phải kết thúc với một giá trị cuối bằng 0 khi bài toán có một trạng thái cuối tự do.

IV. CÁC ĐIỀU KIỆN CUỐI KHÁC

Điều gì sẽ xảy ra đối với nguyên lý cực đại khi điều kiện cuối khác với đường thẳng đứng? Câu trả lời tổng quát là ba điều kiện đầu tiên trong (3.5) sẽ vẫn đúng, nhưng điều kiện hoành sẽ có dạng hơi khác.

4.1. Điểm cuối cố định

Bài toán có điểm cuối cố định (khi cho trước trạng thái cuối và thời gian cuối) không phải là bài toán "đơn giản nhất" trong lý thuyết điều khiển tối ưu. Việc đặt điểm cuối cố định làm bớt một phần độ tự do của đường cong xao động p(t) đối với biến điều khiển u. Do mối liên hệ giữa u và y qua phương trình chuyển động $\dot{y} = f(t, y, u)$ một sự xao động tương ứng trong đường đi $y^*(t)$ mà nó phải kết thúc tại một trạng thái cuối định trước, thì việc chọn đường cong xao động p(t) không thực sự là tuỳ ý. Khi đó câu hỏi nảy sinh là liệu ta vẫn có thể tìm lời giải một cách thích hợp từ điều kiện $\partial H/\partial u = 0$ hay không.

Rất may là, tính vững chắc của nguyên lý cực đại không bị ảnh hưởng bởi sự thoả hiệp trong tính tuỳ ý của p(t). Tuy nhiên, để đơn giản, ta sẽ không đi vào chi tiết để chứng minh điểm này. Với các mục đích của chúng ta, chỉ cần nêu lên rằng, với một điểm cuối cố định, điều kiện hoành được thay bằng điều kiện:

$$y(T) = y_T \qquad (T,\ y_T \text{ cho trước})$$

4.2. Đường thẳng cuối nằm ngang (Bài toán điểm mút cuối cố định)

Nếu bài toán có một đường thẳng cuối nằm ngang thì y_T cố định ($\Delta y_T = 0$), nhưng T thì không (ΔT là tuỳ ý). Từ các số hạng thành phần thứ hai và thứ ba trong (3.30), dễ dàng thấy rằng điều kiện hoành đối với trường hợp này là:

$$[H]_{t=T} = 0 \qquad (3.31)$$

Hàm Hamilton phải đạt giá trị 0 tại thời gian cuối tối ưu, nhưng không có ràng buộc nào đối với giá trị của λ tại thời gian T.

4.3. Đường cong cuối

Trong trường hợp cho trước đường cong cuối $y_T = \phi(T)$ thì ΔT và Δy_T không tuỳ ý, mà liên hệ với nhau bởi quan hệ $\Delta y_T = \phi'(T)\Delta T$. Sử dụng quan hệ này để khử Δy_T, ta có thể kết hợp hai số hạng cuối cùng trong (3.30) thành biểu thức:

$$[H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\phi'(T)\Delta T = [H - \lambda\phi']_{t=T}\Delta T.$$

Từ đây suy ra rằng, với ΔT tuỳ ý, điều kiện hoành phải là:

$$[H - \lambda\phi']_{t=T} = 0 \qquad (3.32)$$

4.4. Đường cuối thẳng đứng cụt

Bây giờ hãy xét bài toán trong đó thời gian cuối T cố định, nhưng trạng thái cuối tự do thay đổi, chỉ chịu điều kiện $y_T \geq y_{min}$, ở đây y_{min} là mức cho phép tối thiểu cho trước của y.

Chỉ có thể có hai loại kết cục trong nghiệm tối ưu: $y_T^* > y_{min}$, hoặc $y_T^* = y_{min}$. Ở trường hợp thứ nhất, ràng buộc cuối tự động thoả mãn. Do đó có thể giải như đối với bài toán có đường cuối thẳng đứng bình thường và dùng điều kiện hoành:

$$\lambda(T) = 0 \qquad \text{với } y_T^* > y_{min} \qquad (3.33)$$

Ở trường hợp thứ hai $y_T^* = y_{min}$, ta có thể giải như đối với bài toán điểm cuối cố định. Như vậy trước hết ta giải bài toán bằng cách xem như trường hợp có đường cuối không cụt Nếu $y_T^* \geq y_{min}$ thì bài toán đã giải xong, nếu ngược lại, tức là $y_T^* < y_{min}$, ta đặt điều kiện $y_T = y_{min}$ và giải như đối với bài toán có điểm cuối cố định.

4.5. Đường cuối nằm ngang cụt

Bài toán trong đó trạng thái cuối là cố định, nhưng thời gian cuối cho phép thay đổi với ràng buộc $T \le T_{max}$, ở đây T_{max} là giá trị cho phép lớn nhất của T . Khi đó trong nghiệm tối ưu ta có hoặc $T^* < T_{max}$ hoặc $T^* = T_{max}$.

Cách giải giống như đối với bài toán có đường cuối thẳng đứng cụt tức là hoặc sử dụng điều kiện hoành:

$$[H]_{t=T} = 0 \tag{3.34}$$

Hoặc sử dụng điều kiện cuối $T = T_{max}$.

$$[H]_{t=T} \ge 0 \qquad \text{với } T^* = T_{max} \tag{3.35}$$

4.6. Các thí dụ ứng dụng

Thí dụ 1

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^1 -u^2 \, dt \tag{3.36}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = y + u$$

$$\text{và} \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 0$$

Với các điểm đầu mút cố định, ta không cần điều kiện hoành nào trong bài toán này.

Bước I. Vì hàm Hamilton là phi tuyến:

$$H = -u^2 + \lambda(y + u) \tag{3.37}$$

và vì u không bị ràng buộc, ta có thể áp dụng điều kiện cấp một:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \tag{3.38}$$

Điều kiện này mang lại $u = \lambda/2$, hay chính xác hơn,

$$u(t) = \frac{1}{2}\lambda(t) \tag{3.39}$$

Vì $\partial^2 H/\partial u^2 = -2$, nghiệm u(t) này làm cực đại H. Để xác định u(t) ta còn cần phải xác định λ(t).

Bước II. Từ phương trình chuyển động hiệp trạng thái:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda$$

ta thu được nghiệm tổng quát:

$$\lambda(t) = ke^{-t} \qquad \text{(k tuỳ ý)} \tag{3.40}$$

Để xác định hằng số k cụ thể, ta nghĩ đến điều kiện biên, nhưng ở bài toán điểm cuối cố định này, điều kiện biên cho trước đối với y không áp dụng trực tiếp được. Do đó ta phải tìm đường y(t), muốn vậy ta chuyển sang bước III.

Bước III. Phương trình chuyển động đối với y là $\dot{y} = y + u$. Sử dụng (3.39) và (3.40) ta có thể viết lại phương trình này là $\dot{y} = y + \frac{1}{2}ke^{-t}$, hay:

$$\dot{y} - y = \frac{1}{2}ke^{-t}$$

Đây là phương trình vi phân kiểu dy/dt + u(t)y = w(t) – với u(t) =-1 và $w(t) = \frac{1}{2}ke^{-t}$. Có thể tìm được nghiệm của nó là:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int -1dt}\left(c + \int \frac{1}{2}ke^{-t}e^{\int -1dt}dt\right) \\ &= e^{t}\left(c + \int \frac{1}{2}ke^{-t}e^{-t}dt\right) \\ &= e^{t}\left(c - \frac{1}{4}ke^{-2t}\right) \\ &= ce^{t} - \frac{1}{4}ke^{-t} \qquad \text{(c tuỳ ý)} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Bước IV. Bây giờ các điều kiện biên y(0) = 1 và y(1) = 0 có thể áp dụng được trực tiếp, và chúng cho ta các giá trị xác định sau đây đối với c và k:

$$c = \frac{1}{1-e^2} \qquad\qquad k = \frac{4e^2}{1-e^2}$$

Do đó, thay các biểu thức này vào (3.41), (3.40) và (3.39), ta có các nghiệm xác định sau đây đối với ba đường đi tối ưu:

$$y^*(t) = \frac{1}{1-e^2}e^{t} - \frac{e^2}{1-e^2}e^{-t}$$

$$\lambda^*(t) = \frac{4e^2}{1-e^2}e^{-t}$$

$$u^*(t) = \frac{2e^2}{1-e^2}e^{-t}$$

Thí dụ 2. Ta hãy xem xét lại thí dụ trước, với điều kiện cuối y(1) = 0 được thay bởi ràng buộc:

$$T = 1 \qquad\qquad y(1) \geq 3$$

Đây là bài toán với đường cuối thẳng đứng cụt. Đầu tiên ta sẽ thử giải bài toán này như thể là đường thẳng cuối thẳng đứng của nó *không* bị cắt cụt. Nếu $y^*(1) \geq 3$ thì bài toán đã được giải; nếu ngược lại, ta sẽ giải lại bài toán bằng cách đặt y(1) = 3.

Bước I. Hamilton vẫn giống như trong thí dụ 1, và nghiệm đối với biến điều khiển vẫn là:

$$u(t) = \frac{1}{2}\lambda(t) \qquad \text{(từ (3.39))} \tag{3.42}$$

Bước II. Mặc dù nghiệm tổng quát đối với λ vẫn là:

$$\lambda(t) = ke^{-t} \qquad \text{(từ (3.40))} \tag{3.43}$$

bây giờ ta có thể sử dụng điều kiện hoành đối với T = 1, tức là λ(1) = 0 để xác định hằng số tuỳ ý. Kết quả là k = 0, nên:

$$\lambda^*(t) = 0 \tag{3.43'}$$

Sau đó suy từ (3.42

$$u^*(t) = 0 \tag{3.44}$$

Bước III. Từ phương trình chuyển động của y ta tìm được:

$$\dot{y} = y + u = y \qquad \text{(theo (3.44))}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân này là:

$$y(t) = ce^t,$$

ở đây hằng số c có thể được xác định là c = 1 từ điều kiện đầu y(0) = 1. Như vậy, đường đi trạng thái tối ưu là:

$$y^*(t) = e^t \tag{3.45}$$

Bước IV. Ta phải kiểm tra (3.45) đối với các ràng buộc cuối. Tại thời gian cuối cố định T = 1, (3.45) cho ta $y^*(1) = e$. Kết quả này vi phạm ràng buộc cuối $y(1) \geq 3$. Bây giờ ta phải đặt $y(1) = 3$ và giải lại bài toán với điểm cuối cố định.

Thí dụ 3

Cực đại $V = \int_0^T -1\,dt$

với ràng buộc $\dot{y} = y + u$,

$y(0) = 5$, $y(T) = 11$, T tự do,

và $u(t) \in [-1,1]$.

Thí dụ này minh hoạ bài toán với một đường thẳng cuối nằm ngang. Thêm nữa, nó minh hoạ loại bài toán được gọi là *bài toán thời gian tối ưu.*

Phiếm hàm mục tiêu:

$$\int_0^T -1\,dt = -t\Big|_0^T = -T$$

Rõ ràng, *cực đại* tích phân này là *cực tiểu* T.

Bước I. Để bắt đầu, hãy lập hàm Hamilton:

$$H = -1 + \lambda(y + u) \tag{3.46}$$

Bởi vì hàm H này tuyến tính theo u, điều kiện $\partial H/\partial u = 0$ không áp dụng được. Và, với biến điều khiển bị giới hạn trong khoảng đóng [-1, 1], ta kỳ vọng giá trị tối ưu của u tại một thời điểm bất kỳ là một giá trị biên, hoặc -1 hoặc 1. Đặc biệt, nếu $\lambda > 0$ (H là một hàm tăng của u), thì $u^* = 1$ (biên trên); nhưng nếu $\lambda < 0$, thì $u^* = -1$. Khả năng thứ ba, nếu $\lambda = 0$ tại một giá trị nào đó của t, thì Hamilton sẽ có đồ thị là đường nằm ngang so với với u, và u^* sẽ trở nên không xác định tại thời điểm đó. Mối quan hệ này giữa u^* và λ có thể cô đọng trong cái gọi là *hàm dấu*, ký hiệu bởi sgn, và được định nghĩa như sau:

$$y = \operatorname{sgn} x \iff y = \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{kxd} \\ -1 \end{Bmatrix} \text{nếu } x \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \tag{3.47}$$

trong đó kxd viết tắt của chữ "không xác định".

Lưu ý rằng nếu y là một hàm dấu của x thì y (nếu xác định) chỉ có thể nhận một trong hai giá trị, và giá trị của y phụ thuộc vào dấu (không phụ thuộc độ lớn) của x.

Áp dụng vào bài toán hiện tại, hàm này trở thành:

$$u^* = \operatorname{sgn}\lambda \quad \text{hay } u^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ nếu } \lambda \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0 \qquad (3.48)$$

Một lần nữa, ta thấy rằng thông tin về λ là cần thiết để có thể xác định u.

Bước II. Từ (3.46), phương trình chuyển động đối với biến hiệp trạng thái là:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda$$

Lấy tích phân ta được:

$$\lambda(t) = ke^{-t} \qquad (\text{k tuỳ ý}) \qquad (3.49)$$

Từ kết quả này, ta thấy dấu của $\lambda(t)$ xác định bởi dấu của hằng số k. Do đó, trừ tình huống $k = 0$ để $\lambda(t) = 0$ đối với mọi t (tình huống trong thực tế không xảy ra ở đây), u* phải xác định và giữ nguyên một dấu. Do đó, mặc dù trong thí dụ hiện tại, hàm Hamilton là tuyến tính theo biến điều khiển u và dẫn đến một nghiệm biên, nó không hề sản sinh ra hiện tượng bang-bang.

Ràng buộc về dấu của k nằm trong điều kiện hoành $[H]_{t=T} = 0$. Sử dụng H trong (3.46), λ trong (3.49) và điều kiện cuối $y(T) = 11$, ta có thể viết điều kiện hoành là:

$$-1 + ke^{-T}(11 + u^*) = 0.$$

Vì u* hoặc là 1 hoặc -1, đại lượng (11 + u*) phải dương, e^{-T} cũng dương. Do đó, k phải dương để thoả mãn điều kiện này. Khi đó suy ra rằng $\lambda(t) > 0$ với mọi t và rằng:

$$u^*(t) = 1 \qquad (3.50)$$

Bước III. Với $u^* = 1$ đối với mọi t, ta có thể biểu diễn phương trình chuyển động của biến trạng thái, $\dot{y} = y + u$, là:

$$\dot{y} - y = 1$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một với hệ số hằng số và một số hạng hằng số. Nghiệm xác định của nó cho ta đường đi y tối ưu:

$$y^*(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$= 6e^{t} - 1 \qquad [y(0) = 5] \tag{3.51}$$

Bước IV. Sau khi đã tìm được u*(t) và y*(t), ta tìm λ*(t). Với mục đích đó, đầu tiên ta quay lại điều kiện hoành $[H]_{t=T} = 0$ để tìm giá trị của hằng số k. Từ (3.50) và (3.51) điều kiện hoành bây giờ rút gọn thành:

$$-1 + ke^{-T}(6e^{T} - 1 + 1) = 0 \quad \text{hay} \quad 6k = 1$$

Như vậy $k = \frac{1}{6}$. Thế kết quả này vào (3.49) cho ta đường đi tối ưu λ:

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{6}e^{-t} \tag{3.52}$$

Bước V. Ta xác định giá trị của T*. Để tính giá trị đó, hãy nhớ lại rằng giá trị trạng thái cuối đã cho là y(T) = 11. Điều này, kết hợp với đường đi y*(t) thu được trên đây, cho ta $11 = 6e^{T} - 1$, hay $e^{T} = 2$. Vì vậy,

$$T^* = \ln 2$$

4.7. Tính hằng số của Hamilton trong các bài toán ôtônôm

Các thí dụ đã thảo luận trên đây đều là các bài toán ôtônôm, nghĩa là các hàm số trong tích phân và f trong phương trình chuyển động không chứa t như một đối số dưới dạng hiển. Một hệ quả quan trọng của đặc tính này là Hamilton tối ưu – Hamilton lấy giá trị dọc theo các đường đi tối ưu của y, u và λ - sẽ có giá trị hằng số qua suốt thời gian.

Để thấy điều này, đầu tiên ta hãy xét đạo hàm theo thời gian của Hamilton H(t,y,u,λ) trong trường hợp tổng quát:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}.$$

Khi H đạt cực đại, ta có $\partial H/\partial u = 0$ (đối với nghiệm trong) hoặc $\dot{u} = 0$ (đối với nghiệm biên). Như vậy số hạng thứ ba trong vế phải bằng không. Hơn nữa, nguyên lý cực đại cũng phát biểu rằng $\dot{y} = \partial H/\partial\lambda$ và $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial y$. Cho nên số hạng thứ hai và thứ tư ở vế phải triệt tiêu nhau.

Kết quả cuối cùng H^*, Hamilton được ước lượng dọc theo quỹ đạo tối ưu của các biến thoả mãn phương trình:

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t} \tag{3.53}$$

Trong trường hợp đặc biệt bài toán có dạng ôtônôm, vì t vắng mặt trong các hàm F và f như một đối số dưới dạng hiển, Hamilton cũng không chứa đối số t. Do đó, ta có $\partial H^* / \partial t = 0$, nên:

$$\frac{dH^*}{dt} = 0 \text{ hay } H^* = \text{hằng số} \quad \text{(đối với các bài toán ôtônôm)} \tag{3.54}$$

Trong Thí dụ 3 chẳng hạn, ta thấy rằng:

$$H^* = -1 + \lambda^*(y^* + u^*) = -1 + \frac{1}{6}e^{-t}(6e^{-t} - 1 + 1) = 0$$

với mọi t.

Vậy ở bài toán có đường cuối nằm ngang, nếu nó lại là ôtônôm thì điều kiện hoành thoả mãn với mọi t, cho nên không cần đặt ra.

V. SO SÁNH PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN VÀ LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Như đã chỉ ra trong (3.2) và (3.2') ta đã thấy bài toán điều khiển tối ưu có thể chuyển đổi thành bài toán biến phân. Người ta có thể phân vân liệu đối với bài toán đã được chuyển đổi như vậy, các điều kiện tối ưu đòi hỏi của nguyên lý cực đại có tương đương với những điều kiện tối ưu của phép tính biến phân hay không, tức là có cho cùng lời giải hay không. Câu trả lời là có:

Đối với bài toán (3.2), hàm Hamilton là:

$$H = F(t,y,u) + \lambda u \tag{3.55}$$

Giả sử hàm này khả vi theo u, ta có thể kê ra các điều kiện sau đây của nguyên lý cực đại:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial u} = F_u + \lambda = 0 \\
&\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \\
&\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -F_y \\
&\lambda(T) = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Phương trình thứ nhất trong (3.56) có thể được viết lại là $\lambda = -F_u$. Mặt khác đạo hàm của H theo $\dot{y}$ ta được $\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \lambda$, nhưng theo phương trình thứ hai $\dot{y} = u$, nên ta có:

$$\lambda = -F_{\dot{y}} \tag{3.57}$$

Lấy vi phân (3.57) theo t cho ta:

$$\dot{\lambda} = -\frac{d}{dt} F_{\dot{y}}$$

Kết hợp với phương trình thứ ba trong (3.56) ta đi đến:

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} = 0$$

Biểu thức này trùng với phương trình Euler.

Khi làm Hamilton cực đại theo u, điều kiện $\partial H/\partial u$ phải đi kèm với điều kiện cần cấp hai $\partial^2 H/\partial u^2 \leq 0$. Lấy đạo hàm biểu thức $\partial H/\partial u$ trong (3.56) cho ta:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = F_{uu} = F_{\dot{y}\dot{y}} \leq 0$$

Đây chính là điều kiện cần Legendre. Như vậy, nguyên lý cực đại nhất quán một cách hoàn toàn với các điều kiện của phép tính biến phân.

Bây giờ ta hãy xét các điều kiện hoành. Đối với bài toán điều khiển với đường cuối thẳng đứng, điều kiện hoành là $\lambda(t) = 0$. Tuy nhiên, theo (3.57) biểu thức này có thể viết là $[-F_{\dot{y}}]_{t=T} = 0$, hoặc tương đương:

$$[F_{\dot{y}}]_{t=T} = 0$$

Lại một lần nữa, đây chính là điều kiện hoành trong phép tính biến phân.

Đối với bài toán với đường cuối nằm ngang, điều kiện hoành điều khiển tối ưu là $[H]_{t=T} = 0$. Từ (3.55), biểu thức này nghĩa là $[F + \lambda u]_{t=T} = 0$. Tuy nhiên, khi sử dụng (3.56) một lần nữa và sau khi thay $\dot{y}$ cho u ta có thể chuyển điều kiện này thành:

$$[F - F_{\dot{y}}\dot{y}]_{t=T} = 0.$$

Đây đúng là điều kiện hoành trong phép tính biến phân. Cũng có thể chỉ ra rằng điều kiện hoành của bài toán với đường cong cuối $y_T = \phi(T)$ trong lý thuyết điều khiển tối ưu có thể được chuyển thành điều kiện tương ứng trong phép tính biến phân và ngược lại.

C. MỘT SỐ ỨNG DỤNG KINH TẾ CỦA NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI

I. CHU TRÌNH (VÒNG) KINH DOANH CHỊU ẢNH HƯỞNG CỦA CHÍNH TRỊ

Nguyên lý cực đại được áp dụng nhanh chóng và khá phổ biến vào các bài toán kinh tế. Những ứng dụng của nó có mặt ở hầu hết các lĩnh vực thường gặp trong kinh tế học vĩ mô và vi mô đến những chủ đề như đánh bắt thuỷ sản, kế hoạch hoá thành phố và kiểm soát ô nhiễm. Trong mục này, ta giới thiệu một mô hình lý thú của William Nordhaus, mô hình này cho thấy rằng trong một nền dân chủ tư sản, những cố gắng của đảng chính trị đương nắm quyền nhằm ngăn chặn đảng (hay các đảng) đối thủ hất cẳng mình có thể thúc đẩy họ theo đuổi các chính sách kinh tế mang lại một kiểu dáng nhất định cho tỷ lệ thất nghiệp và tốc độ lạm phát trong vòng mỗi kỳ bầu cử. Kiểu dáng này lặp đi lặp lại qua các kỳ bầu cử như một chuỗi các vòng kinh doanh chỉ có nguồn gốc chính trị.

1.1. Hàm phiếu bầu và sự lựa chọn Phillips

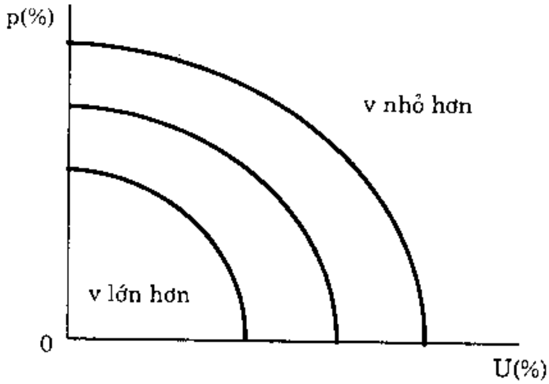
Đối với việc kiểm soát Chính phủ của Đảng đương nắm quyền, trong một nền dân chủ tư sản phải theo đuổi các chính sách lôi cuốn đa số cử tri để giữ chiến thắng trong các cuộc bầu cử. Trong mô hình hiện tại, ta chỉ tập trung chú ý vào các chính sách kinh tế, và thực tế chỉ vào hai biến kinh tế: U (tỷ lệ thất nghiệp) và p (tốc độ lạm phát). Bởi vì những ảnh hưởng xấu của thất nghiệp và lạm phát hình như là những mối quan tâm chủ yếu của cử tri, việc lựa chọn tiêu điểm chú ý như vậy chắc chắn là hợp lý.

Ta có thể mô tả phản ứng của các cử tri đối với tỷ lệ thất nghiệp U, tốc độ lạm phát p bằng *hàm phiếu bầu* (gộp):

$$v = v(U, p) \qquad (v_U < 0,\ v_p < 0) \tag{3.58}$$

ở đây v là một thước đo khả năng giành được phiếu bầu của đảng đương nắm quyền. Các đạo hàm riêng của v theo mỗi đối số là âm, bởi vì giá trị cao của cả U và p đều dẫn đến mất phiếu bầu. Trên Hình 3.6 có minh hoạ ba đường *đồng phiếu*, tức là đường v(U, p) = hằng số; đường cao nhất gắn với v

thấp nhất. Khái niệm đường cong đồng phiếu nhấn mạnh sự kiện là, về phía chính trị, có sự lựa chọn giữa hai biến U và p. Nếu Đảng đương quyền không làm vui lòng cử tri bằng việc gây ra lạm phát cao hơn, nó có thể hy vọng bù lại số phiếu bầu bị mất qua việc giảm đủ mức tỷ lệ thất nghiệp.



Hình 3.6

Bên cạnh sự lựa chọn mang tính chính trị, hai biến nghiên cứu còn có quan hệ lựa chọn với nhau về mặt kinh tế do hệ thức Phillips giữa v và p có bổ sung thêm tốc độ lạm phát kỳ vọng:

$$p = \phi(U) + a\,\pi \qquad (\phi' < 0,\ 0 < a \le 1) \tag{3.59}$$

Phương trình (3.59) nói rằng tốc độ lạm phát thực tế p chẳng những phụ thuộc vào tỷ lệ thất nghiệp U mà còn phụ thuộc vào tốc độ lạm phát mà người ta dự đoán được từ trước và ít nhiều mang tính chủ quan π. Thí dụ ở thời kỳ t, tốc độ lạm phát là 5%, nhưng trước thời kỳ t người ta có thể dự đoán rằng lạm phát ở thời kỳ này là 3%. Cách dự đoán có điều chỉnh dựa trên sai số dự đoán đã mắc phải, được gọi là dự đoán thích nghi.

$$\dot{\pi} = b(p - \pi) \qquad (b > 0) \tag{3.60}$$

Tổng cộng, bây giờ ta có ba biến, U, p và π. Nhưng biến nào phải được coi là biến trạng thái và biến nào là biến điều khiển? Là biến trạng thái, nó phải đi với một phương trình chuyển động trong bài toán. Vì (3.60) tạo thành một phương trình chuyển động đối với π, ta có thể xem π như là một biến trạng thái. Mặt khác, biến U không có, nhưng vì nó có thể ảnh hưởng lên p qua (3.59) và rồi lái π thông qua (3.60), ta có thể sử dụng nó như một biến điều khiển. Tuy nhiên, sử dụng U như một biến điều khiển đòi hỏi giả thiết ẩn rằng chính phủ đương nhiệm có khả năng thực hiện bất kỳ tỷ lệ

thất nghiệp nào mà nó chọn tại thời điểm bất kỳ. Còn về biến p, (3.59) chỉ ra rằng giá trị của nó tại thời gian t bất kỳ sẽ trở thành xác định khi các giá trị của biến trạng thái và biến điều khiển được biết. Như vậy ta có thể coi nó không phải là biến trạng thái mà cũng không là biến điều khiển, mà cũng như v, chỉ là một hàm của hai biến kia.

1.2. Mô hình điều khiển tối ưu của chu trình kinh doanh chịu ảnh hưởng của chính trị (tư bản)

Giả sử rằng Đảng vừa chiến thắng bầu cử tại t = 0, và cuộc bầu cử tiếp theo định sẽ được tổ chức sau T năm tại t = T. Khi đó Đảng đương quyền có tổng cộng T năm để gây ảnh hưởng các cử tri bằng những thành tựu của nó (hay những vẻ bên ngoài của những thành tựu đó) để giành phiếu bầu cho mình. Tại thời điểm bất kỳ trong kỳ [0, T], cặp giá trị của U và p sẽ xác định một giá trị v. Nhưng các giá trị khác nhau có thể phải được đánh trọng số khác nhau tuỳ thuộc thời gian xảy ra. Nếu các cử tri không nhớ một cách hệ thống và chịu ảnh hưởng nhiều hơn bởi những sự kiện xảy ra gần thời gian bầu cử thì các giá trị v của phần sau của thời kỳ [0, T] phải được gán trọng số nặng hơn so với các giá trị đến sớm hơn. Khi đó ta có thể trình bày bài toán điều khiển tối ưu của đảng đương quyền như sau:

Cực đại $\int_0^T v(U,p)e^{rt}\, dt$ (3.61.1)

với ràng buộc $p = \phi(U) + a\pi$ (3.61.2)

$\dot{\pi} = b(p - \pi)$ (3.61.3)

và $\pi(0) = \pi_0$ $\pi(T)$ tự do (π_0, T cho trước) (3.61.4)

Ta nêu vài nhận xét về (3.61). Thứ nhất, hệ thống trọng số được cho bởi hàm mũ e^{rt}, trong đó r > 0 ký hiệu tốc độ lãng quên. Hàm này chỉ ra rằng các giá trị v tại những thời điểm sau được gán trọng số nặng hơn do đó nó không phải là một thừa số chiết khấu. Thứ hai, quan hệ Phillips là một kiểu ràng buộc mới so với dạng bài toán điều khiển mà ta đã phát biểu tuy nhiên ta có thể khử biến p bằng cách thế phương trình đó vào hàm phiếu bầu và phương trình chuyển động. Khi đó phương trình p sẽ biến mất. Thứ ba, như điều kiện biên chỉ ra, đảng đương nắm quyền đối mặt với một đường cuối thẳng đứng, vì T (thời gian bầu cử) đã xác định. Thứ tư, mặc dù tỷ lệ thất nghiệp U trên thực tế phải là không âm nhưng trong cách đặt bài

toán dạng (3.61) ta để nó tự do cho tiện. Bởi vì nếu nó đưa đến nghiệm $U^*(t)$ không chấp nhận được về mặt kinh tế thì ta có thể đặt lại bài toán với tập điều khiển thích hợp.

Để giải bài toán một cách định lượng cụ thể Nordhaus giả định các dạng hàm đặc biệt sau đây:

$$v(U, p) = -U^2 - hp \qquad (h > 0) \tag{3.62}$$

$$p = (j - kU) + a\pi \qquad (j,k > 0,\ 0 < a \leq 1) \tag{3.63}$$

Từ (3.62), có thể thấy rằng các đạo hàm riêng của v quả thực là âm. Trong (3.63), ta thấy rằng quan hệ Phillips $\phi(U)$ được tuyến tính hoá. Sử dụng các hàm đặc biệt này, và sau khi thế (3.63) vào (3.62), bây giờ ta có bài toán:

Cực đại $\int_0^T (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt}\ dt$ (3.64.1)

với ràng buộc $\dot{\pi} = b[j - kU - (1-a)\pi]$ (3.64.2)

và $\pi(0) = \pi_0 \quad \pi(T)$ tự do (π_0, T cho trước) (3.64.3)

1.3. Cực đại Hamilton

Hamilton của bài toán này là:

$$H = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt} + \lambda b[j - kU - (1-a)\pi] \tag{3.65}$$

Cực đại H theo biến điều khiển U, ta có phương trình:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - \lambda bk = 0\,.$$

Từ đây ta giải ra đường đi điều khiển:

$$U(t) = \frac{1}{2}k(h - \lambda e^{-rt}) \tag{3.66}$$

Vì $\partial^2 H/\partial U^2 = -2e^{rt} < 0$, đường điều khiển trong (3.66) thực sự làm cực đại Hamilton tại mọi thời điểm, như nguyên lý cực đại đòi hỏi.

Vì còn có mặt λ trong nghiệm U(t) ta phải tìm đường đi λ(t).

1.4. Quỹ đạo hiệp trạng thái tối ưu

Phương trình chuyển động với biến hiệp trạng thái λ là:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} = hae^{rt} + \lambda b(1-a)$$

Viết lại nó dưới dạng:

$$\dot{\lambda} - b(1-a)\lambda = hae^{rt}.$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Bằng cách thử trực tiếp, chẳng hạn, ta thấy nghiệm tổng quát đối với λ là:

$$\lambda(t) = \lambda_c + \bar{\lambda} = Ae^{b(1-a)t} + \frac{ha}{B}e^{rt} \tag{3.67}$$

trong đó B = r - b + ab, A là một hằng số tuỳ ý phải xác định.

Để xác định A, ta có thể sử dụng điều kiện hoành đối với bài toán đường cuối thẳng đứng, $\lambda(T) = 0$. Cho t = T trong (3.67), áp dụng điều kiện hoành và giải đối với A, ta thấy rằng $A = (-ha/B)e^{BT}$. Vậy nghiệm xác định - đường đi hiệp trạng thái tối ưu - là:

$$\lambda^*(t) = \frac{ha}{B}[e^{rt} - e^{BT+b(1-a)t}] \tag{3.67'}$$

1.5. Quỹ đạo điều khiển tối ưu

Bây giờ ta đã tìm được $\lambda^*(t)$, tất cả còn lại là thế (3.67') vào (3.66) để rút ra quỹ đạo điều khiển tối ưu. Sau khi đơn giản hoá, kết quả là:

$$U^*(t) = \frac{hk}{2B}[(r-b) + bae^{B(T-t)}] \tag{3.68}$$

Đây chính là quỹ đạo điều khiển mà Đảng đương quyền phải theo vì lợi ích của việc được bầu lại ở năm T.

Ý nghĩa kinh tế của đường đi này là gì? Thứ nhất, ta nhận xét rằng U^* là một hàm giảm của t:

$$\frac{dU^*}{dt} = -\frac{1}{2}khbae^{B(T-t)} < 0 \tag{3.69}$$

bởi vì đó là biểu thức mũ và k, h, b và a tất cả là dương. Theo đó, chính sách kinh tế cực đại hoá số phiếu bầu là đặt mức thất nghiệp cao ngay khi thắng bầu cử tại t = 0, và rồi để cho tỷ lệ thất nghiệp giảm ổn định qua suốt kỳ bầu cử [0, T]. Các mức thất nghiệp tối ưu tại thời gian 0 và thời gian T là:

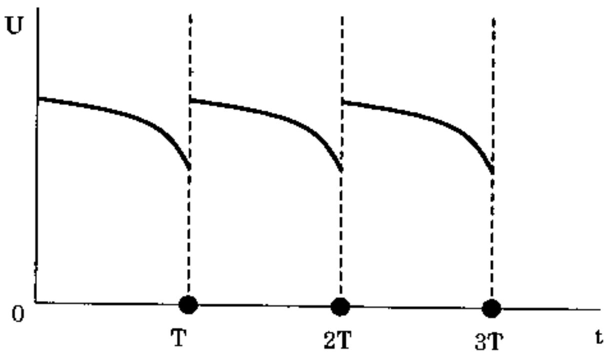
$$U^*(0) = \frac{kh}{2B}[(r-b) + bae^{BT}]$$

$$U^*(T) = \frac{kh}{2B}[(r-b) + ba] = \frac{kh}{2}$$

Ta có nhận xét rằng mức thất nghiệp cuối kh/2 là một lượng dương. Và vì U*(T) là thấp nhất trên toàn bộ đường đi U*(t), các giá trị U* tại mọi giá trị của t trong [0, T] phải đều dương. Điều này có nghĩa là cách đặt bài toán để U tự do mà ta đã lưu ý trên đây, trong trường hợp hiện tại không gây nên rắc rối nào về dấu của U. Tuy nhiên, để có ý nghĩa kinh tế, U*(0) phải nhỏ hơn 1, hay hiện thực hơn, phải nhỏ hơn một tỷ lệ thất nghiệp tối đa $U_{max} < 1$ có thể chịu đựng được. Trừ khi các giá trị tham số khiến cho $U^*(0) \le U_{max}$, bài toán cần phải đặt lại bằng việc đưa vào ràng buộc $U(t) \in [0, U_{max}]$.

Quỹ đạo thất nghiệp tối ưu điển hình, U*(t), được minh hoạ trong Hình 3.7, ở đó chúng ta thấy kiểu dáng đồ thị của U*(t) được lặp lại qua các kỳ bầu cử kế tiếp nhau tạo ra các chu kỳ kinh doanh do ảnh hưởng chính trị. Tuy nhiên, dạng cong của đường đi U*(t) không luôn luôn phải là lõm như trong Hình 3.7. Bởi vì, lấy vi phân (3.69) theo t ta thấy rằng

$$\frac{d^2U^*}{dt^2} = \frac{1}{2}Bkhbae^{B(T-t)} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \text{ khi } \quad B \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \qquad (3.70)$$



Hình 3.7

Các tham số cũng có thể lấy các giá trị khác nhau ở các kỳ bầu cử khác nhau, và đường U*(t) ở kỳ trước không hoàn toàn lặp lại ở kỳ sau, nhưng kiểu dáng đầu kỳ thì cao sau rồi giảm dần là cái tồn tại dai dẳng.

1.6. Đường trạng thái tối ưu

Khuynh hướng chu kỳ gây bởi chính trị trong biến điều khiển U cũng gây ảnh hưởng sang biến trạng thái π, và vì vậy cũng sang cả mức lạm phát

thực p. Kiểu tổng quát là tốc độ lạm phát tối ưu tương đối thấp ở đầu mỗi chu kỳ bầu cử, nhưng trải qua một sự tăng ổn định. Nói cách khác sự biến thiên của p* có khuynh hướng ngược với của U*.

Ta nhớ rằng những kết luận của mô hình hiện tại – cũng như của bất kỳ mô hình khác – gắn chặt với các giả thiết mà ta thừa nhận. Nói riêng, các dạng đặc biệt được chọn đối với hàm phiếu bầu trong (3.62) và đối với quan hệ Phillips với kỳ vọng (3.63) chắc chắn có ảnh hưởng quan trọng đối với nghiệm cuối cùng. Như thay số hạng tuyến tính -hp trong (3.62) bằng số hạng phi tuyến $-hp^2$. Ta sẽ làm thay đổi đáng kể nghiệm U*(t) cũng như nghiệm p*(t).

II. SỬ DỤNG NĂNG LƯỢNG VÀ CHẤT LƯỢNG MÔI TRƯỜNG

Khi một quốc gia có một tài nguyên chủ yếu có thể cạn kiệt, chẳng hạn nhiên liệu, thường người ta phải quan tâm đến vấn đề sử dụng nó theo thời gian như thế nào cho tốt nhất. Trên thế giới ngày nay người ta cũng rất lo lắng về chất lượng môi trường mà họ đang sống. Chúng ta đã thảo luận những vấn đề liên quan khi trình bày phép tính biến phân. Nếu việc sử dụng nhiên liệu có thể cạn kiệt sinh ra ô nhiễm như một sản phẩm phụ kèm theo thì đường đi thời gian tối ưu đối với sử dụng năng lượng là gì? Ta sẽ xem xét câu hỏi câu hỏi này có thể giải quyết bằng lý thuyết điều khiển tối ưu đối với mô hình Bruce A. Forster như thế nào.

2.1. Hàm lợi ích xã hội

Cho S(t) ký hiệu trữ lượng nhiên liệu và E(t) ký hiệu tốc độ khai thác nhiên liệu (và sử dụng năng lượng) tại thời gian t bất kỳ. Khi đó ta có:

$$\dot{S} = -E \tag{3.71}$$

Việc sử dụng năng lượng E để làm ra hàng hoá và dịch vụ tiêu dùng C, nhưng cũng sản sinh ra một luồng ô nhiễm P làm giảm bớt lợi ích (sự chịu đựng). Do đó, thay vì viết một hàm lợi ích đơn giản U(E), ta dùng hàm lợi ích mới, hàm lợi ích có hai đối số, C(E) và P(E). Forster đã đưa ra hàm tiêu dùng và hàm ô nhiễm như sau:

$$C = C(E) \qquad (C' > 0,\ C'' < 0) \tag{3.72}$$

$$P = P(E) \qquad (P' > 0,\ P'' > 0) \tag{3.73}$$

Nói cách khác, các hàm này cho biết rằng sử dụng thêm năng lượng làm tăng tiêu dùng với tốc độ giảm dần, nó sản sinh ra ô nhiễm với tốc độ tăng lên. Trong mô hình này, để đơn giản, ô nhiễm được giả định là không tích luỹ; nghĩa là, nó là một luồng sẽ khuếch tán và không tích trữ lại. Thí dụ cho tình huống này là loại ô nhiễm thải từ ôtô.

Hàm lợi ích xã hội được giả thiết phụ thuộc vào tiêu dùng và ô nhiễm với các tính chất như sau:

$$U = U(C, P) \quad (U_C > 0, U_P < 0, U_{CC} < 0, U_{PP} < 0, U_{CP} = 0) \qquad (3.74)$$

trong đó $U_C = \dfrac{\partial U}{\partial C}$, $U_{CC} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial C^2}$.

Tính chất $U_C > 0$ và $U_{CC} < 0$, nói rằng lợi ích biên của tiêu dùng là dương nhưng giảm dần. Trái lại, $U_P < 0$ và $U_{PP} < 0$, nói rằng lợi ích biên của ô nhiễm là âm và giảm dần (khi cho ô nhiễm tăng thêm một đơn vị thì U_P có thể giảm từ chẳng hạn -2 xuống -3).

Vì cả C và P đến lượt nó lại phụ thuộc E, rốt cuộc lợi ích xã hội chỉ phụ thuộc sử dụng năng lượng, do đó ta có thể lấy E làm biến điều khiển. Trong mô hình, biến S biểu thị mức năng lượng dự trữ có mặt trong (3.71) dưới dạng đạo hàm. Vì thế ta có thể xem S là biến trạng thái và (3.71) là phương trình chuyển động của nó .

2.2. Mô hình điều khiển tối ưu của sử dụng năng lượng

Nếu có một Ủy ban Năng lượng được trao nhiệm vụ xây dựng kế hoạch và vạch chương trình tối ưu sử dụng năng lượng E cho một thời kỳ [0, T], thì bài toán tối ưu động mà nó phải giải có thể có dạng:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^T U[C(E), P(E)]\, dt \qquad (3.75.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{S} = -E \qquad (3.75.2)$$

$$\text{và} \quad S(0) = S_0 \quad S(T) \geq 0 \quad (S_0, T \text{ cho trước}) \qquad (3.75.3)$$

Vì thời gian cuối là cố định, bài toán có đường cuối thẳng đứng cụt.

2.3. Cực đại Hamilton

Hàm Hamilton ở đây là:

$$H = U[C(E), P(E)] - \lambda E \qquad (3.76)$$

Ta có thể tìm giá trị E làm cực đại H bằng cách đặt đạo hàm cấp một của nó bằng 0:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_C C'(E) + U_P P'(E) - \lambda = 0 \qquad (3.77)$$

Giải phương trình này ta được biểu thức của E theo λ.

Vì U_C và U_P cũng như U, phụ thuộc E. Lấy đạo hàm cấp hai của H theo E ta có:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E^2} = U_{CC}C'^2 + U_C C'' + U_{PP}P'^2 + U_P P'' < 0$$

(theo (3.72), (3.73), và (3.74))

Dấu âm của nó bảo đảm rằng (3.77) cực đại H.

2.4. Các đường đi hiệp trạng thái và điều khiển tối ưu

Tuy nhiên, để đưa ra nhiều thông tin hơn về E từ (3.77), ta cần xem xét đường đi thời gian của λ. Theo nguyên lý cực đại và do S không có mặt trong H ta có:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \quad \text{kéo theo } \lambda(t) = c \text{ (hằng số)} \qquad (3.78)$$

Để xác định hằng số c, ta dựa vào điều kiện hoành.

Đối với bài toán này, với đường cuối thẳng đứng cụt, điều kiện hoành tổng quát có dạng: $\lambda(T) \ge 0,\ S(T) \ge 0,\ \lambda(T)\,S(T) = 0$ (3.79)

Trong thực hành ta đặt $\lambda(T) = 0$ (như thể đường cuối không bị cụt) rồi xem nghiệm có thoả mãn $S(T) \ge 0$ hay không. Vì $\lambda(t)$ là một hằng số theo (3.78), đặt $\lambda(T) = 0$ cũng có tác dụng là đặt $\lambda(t) = 0$ với mọi t.

Với $\lambda(t) = 0$, (3.77) rút gọn về một phương trình theo một biến E,

$$U_C C'(E) + U_P P'(E) = 0 \qquad (3.80)$$

mà về nguyên tắc nó có thể giải để tìm đường đi điều khiển tối ưu. Vì phương trình này dộc lập đối với t, nghiệm của nó là hằng số qua suốt thời gian:

$$E^*(t) = E^* \quad \text{(hằng số)} \qquad (*)$$

Ta hãy xem xét ý nghĩa kinh tế của (3.80). Biểu thức vế trái của phương trình đo luồng ảnh hưởng của việc sử dụng năng lượng lên lợi ích xã hội thông qua 2 con đường. Số hạng thứ nhất, $U_CC'(E)$, là ảnh hưởng dương qua tiêu dùng. Số hạng $U_PP'(E)$ là ảnh hưởng âm qua ô nhiễm. Do đó (3.80) nói rằng cần chọn một giá trị E làm cân bằng hai ảnh hưởng này, cũng như quy tắc quen thuộc cực đại lợi nhuận: MC = MR đòi hỏi một công ty cân bằng những ảnh hưởng chi phí và doanh thu khi lựa chọn sản lượng sản xuất.*

2.5. Quỹ đạo trạng thái tối ưu

Bây giờ ta kiểm tra xem nghiệm E* trong (*) có thể thoả mãn ràng buộc $S(T) \geq 0$ hay không. Muốn thế, ta phải tìm đường trạng thái S(t).

Với việc sử dụng năng lượng không đổi, phương trình chuyển động $\dot{S} = -E$ có thể dễ dàng lấy tích phân để được:

$$S(t) = -Et + k \qquad \text{(k tuỳ ý)}$$

Hơn nữa, bằng cách đặt t = 0 trong kết quả này, dễ dàng thấy rằng k biểu thị trữ lượng nhiên liệu ban đầu S_0. Như vậy, đường trạng thái tối ưu có thể viết là:

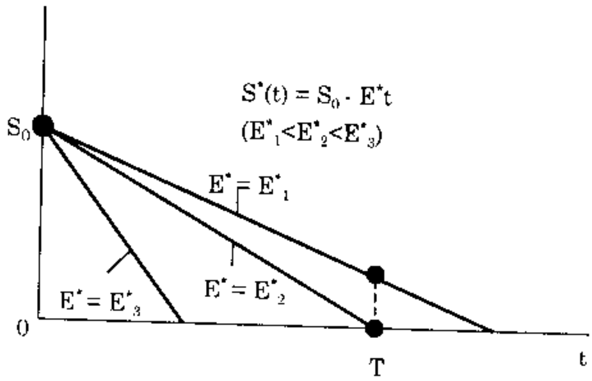
$$S^*(t) = S_0 - E^*t$$

và E* đóng vai trò là tốc độ không đổi sử dụng năng lượng.

Xét ba giá trị minh hoạ của E* trong Hình 3.8, trong đó $E^*_1 < E^*_2 < E^*_3$. Với tốc độ sử dụng năng lượng thấp E^*_1, trữ lượng tối ưu S*(t) có dạng đường thẳng hơi dốc xuống, để cho S*(T) dương. Mặt khác, với tốc độ sử dụng năng lượng E^*_2 cao hơn, trữ lượng năng lượng $S^*(T_1) = 0$ nhiên liệu bị kéo xuống 0.

Nhưng trường hợp còn lại, E^*_3, trữ lượng sẽ sớm cạn kiệt, rõ ràng vi phạm quy định $S(T) \geq 0$. Như vậy, nếu nghiệm của chúng ta E* trong (*) thuộc kiểu E^*_1 hoặc E^*_2 thì điều kiện hoành (3.79) thoả mãn và bài toán được giải. Nhưng nếu nghiệm giống như E^*_3 thì ta phải đặt S(T) = 0, và giải bài toán như bài toán với trạng thái cuối đã cho. Trong trường hợp đó, giá trị E* có thể tìm được trực tiếp từ bằng cách chọn t = T và S(T) = 0:

$$E^* = \frac{S_0}{T} \qquad \text{(nếu (*) vi phạm } S^*(T) \geq 0\text{)}$$



Hình 3.8

C. Ý NGHĨA KINH TẾ CỦA NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI VÀ PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

I. Ý NGHĨA KINH TẾ CỦA NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI

Robert Dorfman đã chỉ ra rằng mỗi phần của nguyên lý cực đại có thể gán cho một ý nghĩa kinh tế về trực quan, và có thể làm cho mỗi điều kiện của nó trở nên đáng tin cậy từ cách nhìn thông thường.

Hãy xét một công ty cố gắng cực đại lợi nhuận của nó trên khoảng thời gian [0, T]. Cho biến trạng thái là số lượng vốn K, và biến điều khiển u, là một quyết định kinh doanh nào đó mà công ty phải xác định tại mỗi thời điểm (như ngân quỹ cho quảng cáo hay chính sách hàng tồn kho). Công ty bắt đầu tại thời gian 0 với vốn K_0, nhưng số vốn cuối còn để ngỏ. Tại một thời điểm bất kỳ, lợi nhuận của công ty phụ thuộc vào số vốn mà nó đang có cũng như chính sách u mà nó chọn lúc đó. Như vậy hàm lợi nhuận của nó là $\pi(t, K, u)$. Nhưng sự lựa chọn chính sách u cũng liên quan tới tốc độ thay đổi của K theo thời gian; nghĩa là, K bị ảnh hưởng bởi u. Từ đó, bài toán điều khiển tối ưu là:

Cực đại $$\Pi = \int_0^T \pi(t,K,u)dt \qquad (3.81.1)$$

với ràng buộc $$\dot{K} = f(t,K,u) \qquad (3.81.2)$$

và $$K(0) = K_0 \quad K(T) \text{ tự do } (K_0, T \text{ cho trước}) \qquad (3.81.3)$$

1.1. Biến hiệp trạng thái như là giá bóng

Nguyên lý cực đại đặt các điều kiện lên ba loại biến: điều khiển, trạng thái và hiệp trạng thái. Biến điều khiển u và biến trạng thái K đã được gán các ý nghĩa kinh tế. Còn biến hiệp trạng thái λ thì sao?

Như đã nói từ trước, λ chẳng khác nào một nhân tử Lagrange và như vậy, phải có ý nghĩa của một giá bóng. Để khẳng định điều đó, hãy viết hai phiếm hàm (3.22") cho hợp với bài toán hiện thời, và xét giá trị của phiếm hàm tại nghiệm:

$$\Pi^* = \int_0^T \left[H(t, K^*, u^*, \lambda^*) + K^*(t)\dot{\lambda}^*\right]dt - \lambda^*(T)K^*(T) + \lambda^*(0)K_0$$

Lấy đạo hàm của Π^* theo vốn ban đầu (đã cho) và vốn cuối (tối ưu) ta được:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial K_0} = \lambda^*(0) \quad \text{và} \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial K^*(T)} = -\lambda^*(T) \tag{3.82}$$

Như vậy, $\lambda^*(0)$, giá trị hiệp trạng thái ban đầu được xác định một cách tối ưu, là một thước đo độ nhạy của tổng lợi nhuận tối ưu Π^* đối với vốn đầu đã cho. Nếu ta có thêm một đơn vị (vô cùng bé) vốn ban đầu, Π^* sẽ lớn thêm một lượng $\lambda^*(0)$. Do đó, biểu thức này có thể xem như giá trị tính quy hay giá bóng của một đơn vị vốn ban đầu. Trong đạo hàm riêng thứ hai trong (3.82), giá trị cuối của đường hiệp trạng thái tối ưu $\lambda^*(T)$, là âm của tốc độ thay đổi của H^* theo số vốn cuối tối ưu. Nếu ta muốn để lại thêm một đơn vị vốn (sử dụng ít đi một đơn vị) ở cuối kỳ kế hoạch, thì ta phải hy sinh tổng lợi nhuận bằng một lượng là $\lambda^*(T)$. Cho nên, lại một lần nữa, giá trị λ^* tại thời gian T đo giá bóng của một đơn vị vốn ở cuối kỳ.

Nói chung $\lambda^*(t)$ là giá bóng của vốn tại thời điểm cụ thể đó. Tuy nhiên để khẳng định điều này, ta phải viết biểu thức nhân tử Lagrange là $\lambda(t)[f(t,K,u) - \dot{K}]$ chứ không là $\lambda(t)[\dot{K} - f(t,K,u)]$. Nếu không thì giá bóng của K là λ^* sẽ âm.

1.2. Hamilton và triển vọng lợi nhuận

Hamilton của bài toán (3.81) là:

$$H = \pi(t, K, u) + \lambda(t) f(t, K, u) \tag{3.83}$$

Thành phần thứ nhất ở vế phải là lợi nhuận tại thời gian t, đem lại từ số vốn hiện có K và quyết định chọn tại thời điểm đó. Chúng ta có thể coi nó là "lợi nhuận trước mắt tương ứng với chính sách u". Trong thành phần thứ hai của (3.83), hàm f(t,K,u) chỉ tốc độ thay đổi của vốn (hiện vật), $\dot{K}$, tương ứng với chính sách u, nhưng khi hàm f được nhân với giá bóng $\lambda(t)$, nó được chuyển đổi thành giá trị bằng tiền. Vì vậy, thành phần thứ hai của Hamilton biểu thị "tốc độ thay đổi của số tiền vốn tương ứng với chính sách u". Số hạng thứ hai có thể xem như là số lợi nhuận mà u sẽ đem lại trong *tương lai*, vì tích luỹ vốn là chuẩn bị điều kiện cho mục tiêu lợi nhuận tương lai. Hai ảnh hưởng của u đối với lợi nhuận trước mắt và tương lai có tính chất cạnh tranh nhau: Một quyết định chính sách u tạo thuận lợi cho lợi nhuận trước mắt thì nó thường đòi hỏi hy sinh lợi nhuận tương lai. Vậy Hamilton biểu thị *lợi nhuận triển vọng trước mắt và tương lai* của các quyết định chính sách.

Nguyên lý cực đại đòi hỏi cực đại Hamilton theo u. Điều này có nghĩa là tại mỗi thời điểm, công ty phải lựa chọn quyết định cực đại tổng lợi nhuận triển vọng. Nói riêng, công ty phải cân đối giữa triển vọng thu được thêm lợi nhuận trước mắt và triển vọng bị mất thêm lợi nhuận tương lai. Quả vậy từ dạng yếu của điều kiện "Max H":

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial \pi}{\partial u} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

ta có:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} = -\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial u} \tag{3.84}$$

Hệ thức này nói rằng phải lựa chọn u* thế nào cho từ đó nếu tăng u thì lợi nhuận biên trước mắt có thêm phải bằng số lợi nhuận biên tương lai bị mất đi.

1.3. Các phương trình chuyển động

Nguyên lý cực đại có liên quan đến hai phương trình chuyển động. Một đối với biến trạng thái K, được đưa vào như một phần của bài toán (3.81), nó miêu tả cách thức mà quyết định của Công ty ảnh hưởng lên tốc độ thay đổi vốn. Phương trình chuyển động đối với biến hiệp trạng thái là:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial K} = -\frac{\partial \pi}{\partial K} - \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial K}$$

hoặc, sau khi nhân cả hai vế với -1,

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial \pi}{\partial K} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial K} \tag{3.85}$$

Vế trái của (3.85) ký hiệu tốc độ giảm của giá bóng theo thời gian, hoặc tốc độ sụt giá của giá bóng.

Phương trình chuyển động đòi hỏi tốc độ này về độ lớn bằng tổng hai số hạng ở vế phải của (3.85). Số hạng thứ nhất , $\partial\pi/\partial K$, biểu thị đóng góp biên của vốn vào lợi nhuận hiện thời, và số hạng thứ hai $\lambda(\partial f/\partial K)$ biểu thị đóng góp biên của vốn vào việc nâng cao giá trị của vốn. Nguyên lý cực đại đòi hỏi rằng giá bóng của vốn giảm với tốc độ mà vốn đóng góp vào lợi nhuận hiện thời và tương lai của công ty.

1.4. Các điều kiện hoành

Còn các điều kiện hoành thì sao? Với một trạng thái cuối tự do K(T) tại một thời gian cuối cố định T (đường cuối thẳng đứng), điều kiện đó là:

$$\lambda(T) = 0$$

Điều này có nghĩa là giá bóng của vốn phải là 0 tại thời điểm cuối. Lý do là giá trị của vốn đối với công ty bắt nguồn từ khả năng sinh lợi nhuận của nó. Khi cho một tầm kế hoạch cứng T, thì chỉ những lợi nhuận tạo ra trong thời kỳ [0, T] là có ý nghĩa, và bất kỳ số vốn nào còn lại ở lúc cuối T, quá muộn để đưa vào sử dụng, sẽ không có giá trị kinh tế đối với công ty. Vì vậy, hoàn toàn tự nhiên là giá bóng của vốn tại thời điểm T phải bằng 0. Từ đó, ta không kỳ vọng công ty bận tâm đến tích luỹ vốn một cách nghiêm chỉnh vào cuối kỳ kế hoạch. Đúng hơn, đến lúc T, nó sẽ cố gắng dùng cho hết số vốn của mình.

Đối với một công ty có ý định tiếp tục tồn tại vượt quá thời kỳ kế hoạch [0, T], có thể là hợp lý nếu quy định một mức chấp nhận được tối thiểu nào đó đối với vốn cuối kỳ, chẳng hạn K_{min}. Tất nhiên, trong trường hợp đó ta có một đường cuối thẳng đứng cụt. Điều kiện hoành bây giờ quy định rằng

$$\lambda(T) \geq 0 \quad \text{và} \quad [K^*(T) - K_{min}]\lambda(T) = 0 \qquad \text{(từ (3.35))}$$

Nếu $K^*(T)$ vượt hơn K_{min}, thì ràng buộc đối với số vốn cuối không phát huy tác dụng. Kết cục giống y như nếu không có hạn chế nào, và điều kiện cũ $\lambda(T) = 0$ sẽ áp dụng được. Nhưng nếu giá bóng cuối $\lambda(T)$ khác 0 (dương), thì giới hạn K_{min} thực sự là ràng buộc theo nghĩa nó ngăn không cho công ty đến cuối kỳ sử dụng hết vốn. Số vốn cuối kỳ công ty thực sự để lại là đúng bằng mức K_{min}.

Cuối cùng, xét trường hợp đường cuối nằm ngang. Trong trường hợp đó, công ty đã định trước mức vốn cuối kỳ, chẳng hạn K_{T0}, nhưng tự do chọn thời gian đạt mục tiêu. Điều kiện hoành:

$$[H]_{t=T} = 0$$

nói rằng hãy chọn lúc cuối T sao cho tổng lợi nhuận trước mắt và tương lai ở lúc đó phải bằng 0. Nói cách khác, công ty không nên đạt tới mức K_{T0} tại thời gian khi tổng lợi nhuận trước mắt và tương lai (giá trị của H) vẫn dương.

II. HÀM HAMILTON THEO GIÁ TRỊ HIỆN THỜI

Trong các ứng dụng kinh tế của lý thuyết điều khiển tối ưu, hàm dưới dấu tích phân F thường chứa thừa số chiết khấu $e^{-\rho t}$. Một hàm F như thế nói chung dạng:

$$F(t,y,u) = G(t,y,u)e^{-\rho t} \tag{3.86}$$

cho nên bài toán điều khiển tối ưu là:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T G(t,y,u)e^{-\rho t}\,dt \tag{3.87.1}$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = f(t,y,u) \tag{3.87.2}$$

và các điều kiện biên (3.87.3)

Theo định nghĩa, hàm Hamilton có dạng:

$$H = G(t,y,u)e^{-\rho t} + \lambda f(t,y,u) \tag{3.88}$$

Nhưng vì nguyên lý cực đại đòi hỏi lấy vi phân của H theo u và y, và vì sự có mặt của thừa số chiết khấu làm tăng tính phức tạp cho các đạo hàm, Do đó để thuận lợi ta định nghĩa hàm Hamilton mới không có thừa số chiết khấu. Hamilton như vậy được gọi là Hamilton *theo giá trị hiện thời*, ở

đây thuật ngữ "giá trị hiện thời (khác với giá trị quy về "hiện tại") dùng để chỉ tính chất "chưa chiết khấu" của Hamilton mới.

Khái niệm Hamilton theo giá trị hiện thời cần có một khái niệm đi kèm là nhân tử Lagrange theo giá trị hiện thời. Do đó ta hãy định nghĩa nhân tử Lagrange (theo giá trị hiện thời) mới m là:

$$m = \lambda e^{\rho t} \qquad (\text{hàm ý } \lambda = me^{-\rho t}) \tag{3.89}$$

Khi đó, Hamilton theo giá trị hiện thời, ký hiệu là H_C, có thể được viết là:

$$H_c \equiv He^{\rho t} = G(t,y,u) + mf(t,y,u) \; (\text{theo (3.88) và(3.89)}) \tag{3.90}$$

Như ta chờ đợi, H_C bây giờ không có thừa số chiết khấu. Lưu ý rằng (3.90) kéo theo:

$$H \equiv H_c e^{-\rho t} \tag{3.90'}$$

2.1. Nguyên lý cực đại cải biên

Nếu ta chọn làm việc với H_C thay vì sử dụng H thì tất cả các điều kiện của nguyên lý cực đại phải được xét lại để xem có cần sự cải biên không.

Điều kiện thứ nhất trong nguyên lý là cực đại H theo u tại mọi thời điểm. Khi chuyển sang Hamilton mới ta chỉ cần thay thế H bởi H_c:

$$\max_u H_c \qquad \text{với mọi } t \in [0, T] \tag{3.91}$$

Phương trình chuyển động đối với biến trạng thái trước đây là $\dot{y} = \partial H / \partial\lambda$. Vì $\partial H / \partial\lambda = f(t,y,u) = \partial H_c / \partial m$ (theo (3.88) và (3.90)), phương trình này giờ là:

$$\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial m} \; (\text{phương trình chuyển động đối với y}) \tag{3.92}$$

Để cải biên phương trình chuyển động đối với biến hiệp trạng thái, $\dot{\lambda} = -\partial H / \partial y$, đầu tiên ta sẽ biến đổi mỗi vế của phương trình này thành một biểu thức bao hàm nhân tử Lagrange mới m, và rồi đặt hai kết quả bằng nhau. Đối với vế trái, ta có, bằng cách lấy đạo hàm (3.89),

$$\dot{\lambda} = \dot{m}e^{-\rho t} - \rho me^{-\rho t}.$$

Sử dụng định nghĩa của H trong (3.90'), ta có thể viết lại vế phải là:

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial H_c}{\partial y}e^{-\rho t}$$

Đặt hai kết quả này bằng nhau và giản ước thừa số chung $e^{-\rho t}$, ta được phương trình chuyển động cải biên sau đây:

$$\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + \rho m \quad \text{(phương trình chuyển động đối với m)} \qquad (3.93)$$

So với phương trình chuyển động ban đầu đối với λ, phương trình chuyển động mới đối với m chứa thêm số hạng ρm.

Còn phải xem xét các điều kiện hoành. Ta sẽ làm việc đó chỉ đối với trường hợp đường cuối thẳng đứng và đường cuối nằm ngang. Đối với trường hợp đường thẳng cuối thẳng đứng, ta có:

$$\lambda(T) = 0 \;\Rightarrow\; [me^{-\rho t}]_{t=T} = 0 \quad \text{(theo (3.89))} \qquad (3.94)$$

$$\Rightarrow\; m(T)e^{-\rho T} = 0$$

Đối với trường hợp đường thẳng cuối nằm ngang, suy luận tương tự cho thấy rằng:

$$[H]_{t=T} = 0 \;\Rightarrow\; [H_c e^{-\rho t}]_{t=T} = 0 \;\text{(theo (3.90'))} \qquad (3.95)$$

$$\Rightarrow\; [H_c]_{t=T}e^{-\rho T} = 0$$

2.2. Các bài toán ôtônôm

Như một trường hợp đặc biệt của bài toán (3.87), cả hai hàm G và f có thể không chứa đối số t; nghĩa là có thể có dạng:

$$G = G(y, u) \qquad \text{và} \qquad f = f(y, u)$$

Khi đó bài toán trở thành:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T G(y,u)e^{-\rho t}\,dt \qquad (3.96.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = f(y,u) \qquad (3.96.2)$$

và các điều kiện biên (3.96.3)

Vì hàm dưới dấu tích phân $G(y,u)e^{-\rho t}$ vẫn chứa t dưới dạng hiển, nói một cách chặt chẽ thì bài toán không ôtônôm. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng Hamilton theo giá trị hiện thời, ta có thể đưa thừa số chiết khấu $e^{-\rho t}$ ra

ngoài sự xem xét. Chính vì lý do đó, các nhà kinh tế có khuynh hướng coi bài toán (3.96) như một bài toán ôtônôm – theo nghĩa đặc biệt là đối số t được đưa vào bài toán dưới dạng hiển chỉ qua thừa số chiết khấu.

Tất nhiên, Hamilton theo giá trị hiện thời là áp dụng được cho bài toán (3.96) cũng như nó áp dụng được cho bài toán (3.87). Và tất cả các điều kiện nguyên lý cực đại cải biên (3.91) đến (3.95) vẫn đúng. Nhưng Hamilton theo giá trị hiện thời của bài toán ôtônôm (3.96) có thêm một tính chất không có trong bài toán (3.87). Vì H_C bây giờ có dạng đặc biệt:

$$H_C = G(y, u) + mf(y, u)$$

không phụ thuộc đối số t, nên giá trị của nó lấy dọc theo các đường đi tối ưu của tất cả các biến phải là hằng số qua suốt thời gian. Nghĩa là:

$$\frac{\partial H_c^*}{\partial t} = 0 \text{ hay } H_c^* = \text{hằng số} \quad \text{(bài toán ôtônôm)} \quad (3.97)$$

2.3. Một cách nhìn khác về mô hình Eisner-Strotz

Xét bài toán điều khiển ôtônôm sau đây mô phỏng theo mô hình Eisner-Strotz, mà trước đây ta đã nghiên cứu như một bài toán của phép tính biến phân với tầm vô hạn:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T [\pi(K) - C(I)]e^{-\rho t}\, dt \qquad (3.98.1)$$

$$\text{với ràng buộc} \qquad \dot{K} = I \qquad (3.98.2)$$

$$\text{và các điều kiện biên} \qquad (3.98.3)$$

Trong đó: π là lợi nhuận, K là số vốn, C là chi phí điều chỉnh, và I là đầu tư ròng.

Biến trạng thái duy nhất là K, và biến điều khiển duy nhất là I. Các hàm π và C có các đạo hàm:

$$\pi''(K) < 0 \qquad C'(I) > 0 \qquad \text{và} \qquad C''(I) > 0$$

Từ hàm Hamilton:

$$H = [\pi(K) - C(I)]e^{-\rho t} + \lambda I$$

ta viết các điều kiện theo nguyên lý cực đại (không kể điều kiện hoành)

$$\frac{\partial H}{\partial I} = -C'(I)e^{-\rho t} + \lambda = 0$$

$$\dot{K} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = I$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial K} = -\pi'(K)e^{-\rho t}$$

Tuy nhiên, nếu ta sử dụng Hamilton theo giá trị hiện thời, ta có:

$$H_c = \pi(K) - C(I) + mI \quad \text{(theo (3.90))} \tag{3.99}$$

và các điều kiện nguyên lý cực đại tương đương:

$$\frac{\partial H_c}{\partial I} = -C'(I) + m = 0 \quad \text{(theo (3.91))} \tag{3.100}$$

$$\dot{K} = \frac{\partial H_c}{\partial m} = I \quad \text{(theo (3.92))} \tag{3.101}$$

$$\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial K} + \rho m = -\pi'(K) + \rho m \quad \text{(theo (3.93))} \tag{3.102}$$

Dạng sau đơn giản hơn bởi vì nó không chứa thừa số chiết khấu $e^{-\rho t}$.

Từ (3.100) ta thấy rằng:

$$m = C'(I) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial m}{\partial I} = C''(I) > 0$$

nghĩa là, m là hàm tăng đơn điệu của I. Theo đó, ta có thể viết hàm ngược $\psi = C'^{-1}$:

$$I = \psi(m) \qquad (\psi' > 0) \tag{3.103}$$

Thế (3.103) vào (3.101), ta có thể biểu thị $\dot{K}$ theo m:

$$\dot{K} = \psi(m) \tag{3.104}$$

Gộp với nhau, (3.104) và (3.102) tạo thành hệ hai phương trình đồng thời theo các biến K và m. Sau khi giải các phương trình này để tìm các đường đi K*(t) và m*(t), và xác định hằng số tuỳ ý dựa trên các điều kiện biên và điều kiện hoành, ta có thể tìm được đường đi tối ưu I*(t) qua (3.103).

III. CÁC ĐIỀU KIỆN ĐỦ

Nguyên lý cực đại cho ta các điều kiện cần đối với điều khiển tối ưu. Nói chung, các điều kiện này là không đủ. Tuy nhiên, khi những điều kiện

lõm thoả mãn thì các điều kiện cho bởi nguyên lý cực đại là đủ đối với mục đích cực đại. Ta sẽ trình bày dưới đây hai định lý về điều kiện đủ như vậy.

3.1. Định lý điều kiện đủ Mangasarian

Định lý về điều kiện đủ cho bởi O. L. Mangasarian phát biểu rằng:

Đối với bài toán điều khiển tối ưu:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T F(t,y,u)\,dt \tag{3.105.1}$$

$$\text{với ràng buộc} \qquad \dot{y} = f(t,y,u) \tag{3.105.2}$$

$$\text{và} \qquad y(0) = y_0 \quad (y_0,\ T \text{ cho trước}) \tag{3.105.3}$$

thì các điều kiện cần của nguyên lý cực đại cũng là đủ đối với cực đại toàn cục của V nếu (1) cả hai hàm F và f khả vi và lõm đồng thời theo các biến (y,u), và (2) trong nghiệm tối ưu thì $\lambda(t) \geq 0$ với mọi $t \in [0, T]$ nếu f là phi tuyến theo y hoặc theo u (3.106)

[Nếu f tuyến tính theo y và theo u thì $\lambda(t)$ không cần ràng buộc nào về dấu.]

Để chứng minh định lý này, trước tiên ta hãy nhớ lại rằng với Hamilton:

$$H = F(t,y,u) + \lambda\, f(t,y,u)$$

đường đi điều khiển tối ưu $u^*(t)$ – và các đường đi $y^*(t)$ và $\lambda^*(t)$ gắn với nó – phải thoả mãn nguyên lý cực đại, nên:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u^*} = F_u(t,y^*,u^*) + \lambda^* f_u(t,y^*,u^*) = 0\ .$$

Ta suy ra:

$$F_u(t,y^*,u^*) = -\lambda^* f_u(t,y^*,u^*) \tag{3.107}$$

Hơn nữa, từ phương trình chuyển động của biến hiệp trạng thái, $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial y$, ta phải có:

$$\dot{\lambda}^* = -F_y(t,y^*,u^*) - \lambda^* f_y(t,y^*,u^*).$$

Ta suy ra rằng:

$$F_y(t,y^*,u^*) = -\dot{\lambda}^* - \lambda^* f_y(t,y^*,u^*) \tag{3.108}$$

Cuối cùng, trong trường hợp của ta bài toán có đường cuối thẳng đứng.

Điều kiện đầu và điều kiện hoành là:

$$y_0^* = y_0 \text{ (đã cho) và } \lambda^*(T) = 0 \tag{3.109}$$

Bây giờ giả sử cả hai hàm F và f là lõm theo (y,u). Khi đó, với hai điểm phân biệt (t,y*,u*) và (t,y,u) trong miền xác định, ta có:

$$F(t,y,u) - F(t,y^*,u^*) \le F_y(t,y^*,u^*)(y-y^*) + F_u(t,y^*,u^*)(u-u^*) \tag{3.110}$$

$$f(t,y,u) - f(t,y^*,u^*) \le f_y(t,y^*,u^*)(y-y^*) + f_u(t,y^*,u^*)(u-u^*) \tag{3.110'}$$

Lấy tích phân cả hai vế của (3.110) trên [0, T], bất đẳng thức đó trở thành:

$$V - V^* \le \int_0^T [F_y(t,y^*,u^*)(y-y^*) + F_u(t,y^*,u^*)(u-u^*)]dt$$

$$= \int_0^T [-\dot\lambda^*(y-y^*) - \lambda^* f_y(t,y^*,u^*)(y-y^*) - \lambda^* f_u(t,y^*,u^*)(u-u^*)]dt \tag{3.111}$$

Thành phần thứ nhất của tích phân cuối cùng, liên quan tới biểu thức $\dot\lambda^*(y-y^*)$, có thể lấy tích phân từng phần và đem lại:

$$\int_0^T -\dot\lambda^*(y-y^*)dt = \int_0^T \lambda^*[f(t,y,u) - f(t,y^*,u^*)]dt$$

Thay kết quả này vào (3.111) ta có:

$$V - V^* \le \int_0^T \lambda^*[f(t,y,u) - f(t,y^*,u^*) - f_y(t,y^*,u^*)(y-y^*) - f_u(t,y^*,u^*)(u-u^*)]dt \le 0 \tag{3.111'}$$

Bất đẳng thức cuối cùng suy từ giả thiết $\lambda^* \ge 0$ trong (3.106), và sự kiện là biểu thức trong ngoặc vuông trong hàm dưới dấu tích phân là ≤ 0 theo (3.110'). Do đó, kết quả cuối cùng là:

$$V \le V^* \tag{3.110''}$$

Chứng tỏ V^* là một cực đại (toàn cục), như đã nêu trong định lý.

Ta nhận xét rằng nếu hàm f là tuyến tính theo (y, u), thì (3.110') trở thành một đẳng thức thật sự. Trong trường hợp đó, biểu thức trong ngoặc

vuông ở dưới dấu tích phân trong (3.111') bằng 0, và ta có thể có kết quả mong muốn $V - V^* \leq 0$ không cần xét đến dấu của λ^*, nên ràng buộc trong (3.106') có thể bỏ qua.

Định lý trên dựa trên cơ sở các hàm F và f là lõm ngặt, các bất đẳng thức yếu trong (3.110) và (3.110') sẽ trở thành các bất đẳng thức ngặt, các bất đẳng thức trong (3.111), (3.111') và (3.111") cũng vậy. Nguyên lý cực đại khi đó sẽ là điều kiện đủ cho một cực đại toàn cục duy nhất của V.

Mặc dù chứng minh định lý tiến hành trên giả thiết đường cuối thẳng đứng, nhưng định lý cũng đúng đối với các bài toán khác với T cố định (điểm cuối cố định hoặc đường cuối thẳng đứng cụt). Để thấy điều này, hãy nhớ lại rằng, trong chứng minh định lý điều kiện hoành $\lambda^*(T) = 0$ trong (3.109) được áp dụng trong quá trình tích phân từng phần để làm cho biểu thức $-\lambda^*(T)(y_T - y_T^*)$ triệt tiêu. Nhưng biểu thức này cũng sẽ triệt tiêu nếu bài toán một trạng thái cuối y_{T0} cố định, khi đó biểu thức đã nêu trở thành $-\lambda^*(T)(y_{T0} - y_T^*)$, và nó phải bằng 0 bởi vì y_T^* phải bằng y_{T0}. Hơn nữa, nếu bài toán có đường cuối thẳng đứng cụt, thì hoặc điều kiện hoành $\lambda^*(T) = 0$ thoả mãn (nếu điểm cụt không là điểm ràng buộc) hoặc ta phải xử lý bài toán như bài toán với trạng thái cuối cố định tại điểm cụt. Trong mọi trường hợp, biểu thức đã nêu sẽ triệt tiêu. Như vậy, định lý Mangasarian áp dụng được nếu T cố định.

Trong ứng dụng định lý này, có thể kết hợp các điều kiện của Mangasarian (1) và (2) thành một điều kiện lõm đối với Hamilton. Nếu các hàm F và f cả hai là lõm theo (y, u), và nếu λ là không âm, thì Hamilton $H = F + \lambda f$ là tổng của hai hàm lõm cũng phải là lõm theo (y, u). Vì vậy, định lý có thể được phát biểu lại theo tính lõm của H.

3.2. Định lý điều kiện đủ Arrow

Định lý điều kiện đủ của Kenneth J. Arrow, sử dụng điều kiện yếu hơn định lý Mangasarian, và có thể được coi như tổng quát hoá định lý này. Dưới đây, ta sẽ chỉ ra phần cốt lõi của nó mà không nhắc lại chứng minh.

Tại một thời điểm bất kỳ, khi đã cho các giá trị của các biến trạng thái và hiệp trạng thái y và λ, hàm Hamilton được cực đại bằng u^*, phụ thuộc vào t, y và λ:

$$u^* = u^*(t, y, \lambda) \quad (3.112)$$

Khi thay (3.112) vào Hamilton, ta thu được biểu thức mà ta gọi là *hàm Hamilton cực đại hoá*:

$$H^0(t,y,\lambda) = F(t, y, u^*) + \lambda f(t, y, u^*) \quad (3.113)$$

Lưu ý rằng khái niệm H^0 khác với khái niệm Hamilton tối ưu H^* đã gặp trong (3.53) và (3.54). Vì H^* ký hiệu Hamilton lấy giá trị dọc theo tất cả các đường đi tối ưu, nghĩa là lấy giá trị tại $y^*(t)$, $u^*(t)$ và $\lambda^*(t)$ đối với mọi điểm thời gian, các đối số y, u và λ tất cả có thể được thế và đưa ra ngoài để lại H^* như một hàm số chỉ của t: $H^* = H^*(t)$. Trái lại, H^0 được lấy giá trị chỉ theo $u^*(t)$; như vậy, trong khi đối số u có thể được thế để đưa ra ngoài, các đối số khác vẫn còn lại, nên $H^0 = H^0(t,y,\lambda)$ vẫn là một hàm số với ba đối số.

Định lý Arrow phát biểu rằng, trong bài toán điều khiển tối ưu (3.105), các điều kiện của nguyên lý cực đại là điều kiện đủ đối với cực đại hoá toàn cục của V, nếu hàm Hamilton cực đại hoá H^0 xác định trong (3.113) là lõm theo biến y đối với mọi t trong khoảng thời gian [0,T] và với λ đã cho.

Lý do để định lý Arrow có thể được coi như tổng quát hoá định lý Mangasarian – hay định lý Magasarian như trường hợp đặc biệt của định lý Arrow – là như sau: Nếu cả hai hàm F và f là lõm theo (y,u) và $\lambda \geq 0$, như giả định bởi Mangasarian, thì $H = F + \lambda f$ cũng là lõm theo (y, u), và từ đó suy ra rằng H^0 là lõm theo y như giả định bởi Arrow. Nhưng H^0 có thể là lõm theo y ngay cả nếu F và f không lõm theo (y, u), mà điều đó khiến cho điều kiện Arrow là một đòi hỏi yếu hơn.

Giống như định lý Mangasarian, định lý Arrow thực sự vẫn đúng đối với các kiểu điều kiện cuối với T cố định khác. Cũng vậy, mặc dù định lý được diễn tả qua hàm Hamilton H thông thường và dạng "cực đại" H^0 của nó, nó cũng có thể diễn đạt lại, sử dụng Hamilton theo giá trị hiện thời H_C và dạng cực đại hoá $H^0{}_C$ của nó.

3.3. Các thí dụ

Thí dụ 1. Ta đã thảo luận bài toán khoảng cách ngắn nhất:

$$\text{Cực đại} \qquad V = \int_0^T -\left(1 + u^2\right)^{1/2} dt$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{y} = u$$

và $y(0) = A \quad y(T)$ tự do (A, T cho trước) (từ (3.7))

Ta hãy áp dụng cả hai định lý điều kiện đủ.

Đối với định lý Mangasarian, ta nhận xét rằng cả hàm F và f đều không phụ thuộc y, nên điều kiện lõm chỉ liên quan đến u. Từ hàm F, ta thu được:

$$F_u = -u(1+u^2)^{-1/2} \quad \text{và} \quad F_{uu} = -u(1+u^2)^{-3/2} < 0$$

Như vậy, F là lõm theo u. Còn về hàm f, f = u, vì nó tuyến tính theo u, nó tự động là lõm theo u. Ngoài ra, sự kiện f là tuyến tính làm cho điều kiện (3.106) trở nên không cần thiết. Do đó, các điều kiện Mangasarian thoả mãn, và nghiệm tìm thấy trước đây không làm cực đại V (mà làm cực tiểu khoảng cách) toàn cục.

Một khi các điều kiện Mangasarian thoả mãn, không cần thiết phải kiểm tra điều kiện Arrow nữa. Nhưng nếu ta muốn áp dụng định lý Arrow, ta có thể tiến hành kiểm tra xem Hamilton cực đại hoá H^0 có là lõm theo y không. Trong thí dụ hiện tại, Hamilton là:

$$H = -(1+u^2)^{1/2} + \lambda u$$

Khi thay điều khiển tối ưu:

$$u(t) = \lambda(1-\lambda^2)^{-1/2} \qquad \text{(từ (3.9))}$$

vào H để khử u, biểu thức H^0 thu được chỉ chứa λ, không chứa y. Như vậy H^0 là tuyến tính và vì vậy là lõm theo y với λ đã cho, và nó thoả mãn điều kiện đủ Arrow.

Thí dụ 2. Bây giờ ta hãy kiểm tra xem nguyên lý cực đại có phải là điều kiện đủ đối với bài toán điều khiển mô phỏng từ mô hình Eisner-Strotz hay không:

$$\text{Cực đại} \qquad \int_0^T [\pi(K) - C(I)]e^{-\rho t}\, dt$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{K} = I$$

và các điều kiện biên (từ (3.98))

ở đây $\pi''(K) < 0$, $C'(I) > 0$, và $C''(I) > 0$.

Đối với các điều kiện Mangasarian, ta có thể thấy ngay rằng hàm f(f = I) là tuyến tính và lõm theo I. Để kiểm tra tính lõm của hàm F theo các

biến (K,I), ta cần các đạo hàm riêng cấp hai của $F = [\pi(K) - C(I)]e^{-\rho t}$. Các đạo hàm này là:

$$F_{KK} = \pi''(K)e^{-\rho t} < 0$$

$$F_{KI} = F_{IK} = 0$$

$$F_{II} = -C''(I)e^{-\rho t} < 0$$

Như vậy, theo quy tắc kiểm định đối với tính xác định dấu, ta tìm được ở đây $|D_1| < 0$ và $|D_2| > 0$, chứng tỏ F là lõm chặt theo (K, I). Vì điều kiện (3.106) lại không cần thiết , cho nên các điều kiện Mangasarian hoàn toàn thoả mãn.

Để kiểm tra lại điều kiện đủ Arrow, ta nhớ lại từ (3.100) và (3.103) rằng, với Hamilton theo giá trị hiện thời:

$$H_c = \pi(K) - C(I) + mI \quad \text{[từ (3.99)]}$$

bằng cách đặt $\partial H_c / \partial I = 0$, giải ra đối với m theo I và rồi viết I như một hàm ngược của m, ta có thể biểu thị điều khiển tối ưu ở dạng:

$$I = \psi(m) \qquad \text{[từ (3.103)]}$$

Thế điều khiển tối ưu này vào H_c cho ta Hamilton theo giá trị hiện thời cực đại hoá:

$$H_c^0 = \pi(K) - C[\psi(m)] + m\psi(m)$$

Vì $\partial H_c^0 / \partial K = \pi'(K)$ và $\partial^2 H_c^0 / \partial K^2 = \pi''(K) < 0$, Hamilton theo giá trị hiện thời cực đại hoá là lõm chặt theo biến trạng thái K. Như vậy, điều kiện đủ Arrow thoả mãn.

Việc kiểm tra tính lõm trong thí dụ hiện tại hơi khó khăn hơn so với trong hai thí dụ trước, bởi vì mặc dù mô hình đơn giản nhưng nó gắn với các hàm tổng quát. Thường thì các mô hình được xây dựng với những giả thiết từ đầu về tính lồi hoặc lõm, bằng cách đó tránh sự cần thiết kiểm tra các điều kiện đủ.

IV. CÁC BÀI TOÁN VỚI NHIỀU BIẾN TRẠNG THÁI VÀ BIẾN ĐIỀU KHIỂN

Để đơn giản, cho đến nay ta chỉ tập trung vào những bài toán có một biến trạng thái và một biến điều khiển. Việc tổng quát hoá cho các bài toán có nhiều biến trạng thái và biến điều khiển về nguyên tắc là rất dễ dàng. Nhưng, thủ tục giải trở nên phức tạp hơn.

4.1. Bài toán

Giả sử có n biến trạng thái, $y_1, ..., y_n$, và m biến điều khiển, $u_1,..., u_m$. Hai số n và m không có ràng buộc về độ lớn tương đối; có thể xảy ra n < m, n = m, hoặc n > m. Mỗi biến trạng thái y_j phải gắn với một phương trình chuyển động, mô tả $\dot{y}_j$ phụ thuộc đặc biệt vào t, vào các giá trị của y_j và các biến trạng thái khác tại thời gian t, cũng như vào các giá trị của mỗi biến điều khiển u_i chọn tại thời gian t. Như vậy, trong bài toán phải có n phương trình vi phân dạng:

$$\dot{y}_1 = f^1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{y}_n = f^n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m)$$

và phải có n điều kiện đầu đối với các biến y. Giả sử bài toán là bài toán có điểm cuối cố định, ta cũng phải có n điều kiện cuối cho trước đối với các biến trạng thái. Mỗi biến điều khiển u_i có thể phải chịu một giới hạn trong miền điều khiển $\mathscr{U}_i$. Nếu giả thiết các điểm đầu và cuối cố định, bài toán điều khiển tối ưu có thể được biểu diễn là:

Cực đại $\quad V = \int_0^T F(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m)\, dt$

với ràng buộc $\quad \dot{y}_1 = f^1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m)$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{y}_n = f^n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m)$$
$$y_1(0) = y_{10}, ..., y_n(0) = y_{n0}$$
$$y_1(T) = y_{1T}, ..., y_n(T) = y_{nT}$$

và $\quad u_1(t) \in \mathscr{U}_1, ..., u_m(t) \in \mathscr{U}_m \qquad (3.114)$

Sử dụng chỉ số j cho các biến trạng thái và chỉ số i cho các biến điều khiển, ta có thể phát biểu lại bài toán như sau:

Cực đại $\quad V = \int_0^T F(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m)\, dt \qquad (3.114'.1)$

với ràng buộc $\dot{y}_j = f^j(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m) \qquad (3.114'.2)$

$y_j(0) = y_{j0}, ..., y_j(T) = y_{jT} \qquad (3.114'.3)$

và $\quad u_i(t) \in \mathscr{U}_i \quad (i = 1, ..., m, j = 1, ..., n) \qquad (3.114'.4)$

Để phát biểu gọn hơn, ta có thể sử dụng ký hiệu véc tơ. Định nghĩa véc tơ y và véc tơ u là:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ u_m \end{bmatrix}$$

thì hàm dưới dấu tích phân F trong (3.114') có thể được viết gọn là F(t, y, u). Cũng như vậy, các đối số trong các hàm f^j có thể được đơn giản thành (t, y, u). Nếu ta định nghĩa thêm hai véc tơ:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ . \\ . \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} , \qquad f(t,y,u) = \begin{bmatrix} f^1(t,y,u) \\ . \\ . \\ f^n(t,y,u) \end{bmatrix}$$

thì các phương trình chuyển động có thể được viết gộp trong một phương trình dưới dạng véc tơ: $\dot{y} = f(t,y,u)$. Mở rộng cách này cho các điều kiện biên ta có thể viết $y(0) = y_0$ và $y(T) = y_T$, ở đây $y(0)$, y_0, $y(T)$ và y_T tất cả đều là véc tơ n chiều. Và, cuối cùng ta có thể biểu thị những giới hạn miền điều khiển bằng phát biểu véc tơ $u(t) \in \mathcal{U}$.

Dó đó, ở dạng véc tơ, phát biểu của bài toán điều khiển tối ưu đơn giản là:

Cực đại $\quad V = \int_0^T F(t,y,u)\,dt \qquad$ (3.114".1)

với ràng buộc $\quad \dot{y} = f(t,y,u) \qquad$ (3.114".2)

$\quad y(0) = y_0 \qquad y(T) = y_T \qquad$ (3.114".3)

và $\quad u(t) \in \mathcal{U} \qquad$ (3.114".4)

Nhìn bề ngoài, nó không khác gì so với bài toán với một biến trạng thái và một biến điều khiển. Sự khác nhau duy nhất là, trong (3.114"), một số ký hiệu biểu thị véc tơ. Tuy nhiên, lưu ý rằng ngay cả trong phát biểu dạng véc tơ của bài toán, không phải tất cả các ký hiệu đều biểu thị véc tơ. Ký hiệu V rõ ràng là một đại lượng vô hướng, và các ký hiệu t và T cũng thế.

4.2. Nguyên lý cực đại đối với bài toán nhiều biến trạng thái và biến điều khiển

Việc mở rộng nguyên lý cực đại cho trường hợp nhiều biến tương đối dễ dàng. Trước hết, để lập hàm Hamilton, đối với mọi hàm f^j trong bài toán ta đưa vào một nhân tử Lagrange. Như vậy, ta có:

$$H \equiv F(t,y,u) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f^j(t,y,u) \tag{3.115}$$

ở đây y và u là các véc tơ trạng thái và hiệp trạng thái đã định nghĩa trước đây. Số hạng tổng ở vế phải, cũng có thể được viết bằng ký hiệu véc tơ. Ta định nghĩa véc tơ cột n chiều là:

$$\lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ . \\ . \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

và véc tơ chuyển vị của nó: $\lambda^T \equiv [\lambda_1(t) \ \ldots \ \lambda_n(t)]$

thì Hamilton có thể được viết là:

$$H \equiv F(t,y,u) + \lambda^T f(t,y,u) \tag{3.115'}$$

Biểu thức này rất giống với Hamilton trong trường hợp một biến, ngoại trừ là, ở đây số hạng cuối cùng là một tích vô hướng – tích của véc tơ hàng λ^T và véc tơ cột f(t, y, u).

Đòi hỏi rằng Hamilton đạt cực đại tại mọi thời điểm theo các biến điều khiển vẫn có giá trị như trước đây. Như vậy ta có thể vẫn viết điều kiện:

$$\underset{u}{\text{Max}}\ H \tag{3.116}$$

Nhưng u bây giờ là một véc tơ m chiều, nên ta phải chọn tại mỗi thời điểm m giá trị điều khiển $u_1^*, \ldots, u_m^*$.

Các phương trình chuyển động đối với các biến trạng thái y_j là:

$$\dot{y}_j = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \qquad (j = 1,\ldots,n) \tag{3.117}$$

Tương tự, các phương trình chuyển động đối với các biến hiệp trạng thái λ_j là:

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial y_j} \qquad (j = 1,...,n) \tag{3.118}$$

(3.117) và (3.118) có cả thảy 2 n phương trình vi phân – cùng nhau tạo thành hệ chính tắc của bài toán hiện tại. 2n hằng số tuỳ ý mà ta dự tính xuất hiện từ các phương trình vi phân này có thể xác định bằng cách sử dụng 2n điều kiện biên.

Nếu muốn, ta cũng có thể chuyển hệ chính tắc sang ký hiệu véc tơ. Phát biểu tương đương với (3.117) là:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda^T} \qquad (\lambda^T = \text{chuyển vị của } \lambda) \tag{3.117'}$$

Điều đáng chú ý về biểu thức này là: H là được đạo hàm theo λ^T (véc tơ hàng). Nhìn vào (3.115') ta sẽ thấy rõ tại sao lại như vậy. Tuy nhiên, bổ sung thêm vào vấn đề này là (3.117') phù hợp với quy tắc toán học rằng đạo hàm của một đại lượng vô hướng theo một véc tơ hàng (cột) là một véc tơ cột (hàng). Theo đó, chuyển sang ký hiệu véc tơ của (3.118) là:

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (\dot{\lambda}^T = \text{chuyển vị của } \dot{\lambda}) \tag{3.118'}$$

4.3. Các điều kiện hoành

Bài toán (3.114) giả định các điểm đầu mút cố định. Nếu điểm cuối là biến đổi, ta lại cần các điều kiện hoành thích hợp.

Đối chiếu lại (3.30), ta thấy rằng đối với bài toán một biến trạng thái, các điều kiện hoành được rút ra từ hai số hạng cuối cùng của biểu thức $dV/d\varepsilon$ đặt bằng 0: $[H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\Delta y_T = 0$. Khi có n biến trạng thái trong bài toán, hai số hạng này sẽ mở rộng thành một biểu thức với (n + 1) số hạng:

$$[H]_{t=T}\Delta T - \lambda_1(T)\Delta y_{1T} - \lambda_2(T)\Delta y_{2T} - \ldots - \lambda_n(T)\Delta y_{nT} = 0 \tag{3.119}$$

Từ đó, phát sinh hai điều kiện hoành cơ bản sau đây:

$$[H]_{t=T} = 0 \qquad (\text{nếu T tự do}) \tag{3.120}$$

$$\lambda_j(T) = 0 \qquad (\text{nếu } y_{jT} \text{ tự do}) \tag{3.121}$$

Rõ ràng, các điều kiện này căn bản không khác các điều kiện hoành đối với trường hợp một biến trạng thái. Những điểm khác chỉ là (1) Hamilton H trong (3.120) đối với bài toán n biến hiện tại chứa nhiều số hạng hơn so với trường hợp một biến, (2) khi có các biến trạng thái với trạng thái cuối tự do, sẽ có nhiều điều kiện kiểu $\lambda_j(T) = 0$ trong các điều kiện hoành đối với các bài toán đường cuối và đường thẳng cuối cụt về căn bản cũng giống các điều kiện hoành đối với trường hợp một biến. Giả sử rằng thời gian cuối là tự do, và hai biến trạng thái, y_1 và y_2, đòi hỏi có giá trị cuối phụ thuộc vào thời gian cuối bởi các quan hệ:

$$y_{1T} = \phi_1(T) \quad \text{và} \quad y_{2T} = \phi_2(T) \tag{3.122}$$

Khi đó, với một ΔT nhỏ, ta có các biểu thức sau đây:

$$\Delta y_{1T} = \phi_1'(T)\Delta T \quad \text{và} \quad \Delta y_{2T} = \phi_2'(T)\Delta T\,.$$

Sử dụng các kết quả này để khử Δy_{1T} và Δy_{2T} trong (3.119), ta có thể viết lại là:

$$[H - \lambda_1\phi_1' - \lambda_2\phi_2']_{t=T}\Delta T - \lambda_3(T)\Delta y_{3T} - \ldots - \lambda_n(T)\Delta y_{nT} = 0 \tag{3.123}$$

Điều kiện hoành đối với bài toán đường cong cuối này là:

$$[H - \lambda_1\phi_1' - \lambda_2\phi_2']_{t=T}\Delta T = 0 \quad \text{(so sánh với(3.32))} \tag{3.124}$$

Điều kiện (3.124) – cần thay thế cho (3.120) – cùng với hai phương trình trong (3.122) cho ta ba quan hệ để xác định ba ẩn số T, y_{1T} và y_{2T}. Các biến trạng thái khác ($y_3,\ldots, y_n$), được giả định ở đây là có giá trị cuối tự do, vẫn phải chịu các kiểu điều kiện hoành trong (3.121).

Nếu thời gian cuối cố định, và tất cả các biến trạng thái có các đường cuối thẳng đứng cụt, thì điều kiện hoành là:

$$\lambda_j(T) \ge 0,\; y_{jT} \ge y_{j,min},\; (y_{jT} - y_{j,min})\lambda_j(T) = 0 \tag{3.125}$$

$$(j = 1, \ldots, n) \quad \text{(so sánh (3.35))}$$

Điều kiện này dùng như một điều kiện thay thế cho (3.121).

Cuối cùng, đối với bài toán với thời gian cuối cho phép tối đa, T_{max}, điều kiện hoành là:

$$[H]_{t=T} \ge 0 \quad T \le T_{max} \quad (T - T_{max})[H]_{t=T} = 0 \tag{3.126}$$

Điều kiện này là một kiểu khác thay thế cho (3.120).

4.4. Ứng dụng kinh tế - mô hình xác định Chính sách chống ô nhiễm

Trong mô hình Forster về sử dụng năng lượng và chất lượng môi trường, ô nhiễm được lấy là một *biến luồng*. Biến này được minh hoạ bằng thí dụ khí thải ô tô, mà nó gây hại cho môi trường vào lúc hiện thời, nhưng tan biến nhanh và không tích luỹ thành một trữ lượng tồn tại lâu dài. Nhưng trong các loại ô nhiễm khác, như chất thải phóng xạ và làm đổ dầu lửa, các chất gây ô nhiễm tồn tại như một trữ lượng và sản sinh những ảnh hưởng kéo dài. Việc mô hình hoá ô nhiễm như một *biến kho* cũng được Forster xem xét. Mô hình này chứa hai biến trạng thái và hai biến điều khiển.

4.4.1. Lượng ô nhiễm

Như trước đây, ta sử dụng ký hiệu E để biểu thị lượng khai thác nhiên liệu và sử dụng năng lượng. Nhưng ký hiệu P bây giờ sẽ ký hiệu trữ lượng (chứ không phải luồng) ô nhiễm, với $\dot{P}$ là luồng. Việc sử dụng năng lượng sinh ra một luồng ô nhiễm. Nếu khối lượng của luồng ô nhiễm tỷ lệ thuận với lượng năng lượng sử dụng, thì ta có thể viết $\dot{P} = \alpha E$, $(\alpha > 0)$. Cho A tượng trưng cho mức hoạt động chống ô nhiễm, và giả sử rằng A có thể làm giảm trữ lượng ô nhiễm theo cách thức tỷ lệ. Khi đó, từ xem xét này, ta có $\dot{P} = -\beta A$, $(\beta > 0)$. Thêm nữa, nếu trữ lượng ô nhiễm chịu sự giảm theo hàm mũ với tốc độ $\delta > 0$, thì ta có $\dot{P}/P = -\delta$, do đó $\dot{P} = -\delta P$. Kết hợp các nhân tố ảnh hưởng lên P này, ta có thể viết:

$$\dot{P} = \alpha E - \beta A - \delta P \quad (\alpha, \beta > 0, 0 < \delta < 1) \tag{3.127}$$

4.4.2. Trữ lượng nguồn năng lượng

Việc triển khai các hoạt động chống ô nhiễm A bản thân nó đòi hỏi sử dụng năng lượng. Nghĩa là A gây nên một lượng giảm, trữ lượng nguồn năng lượng S. Khi giả định một quan hệ tỷ lệ giữa A và $\dot{S}$, bằng cách chọn đơn vị thích hợp cho A và vì S cũng giảm do sử dụng năng lượng trong các hoạt động kinh tế khác, chúng ta cũng sẽ có:

$$\dot{S} = -A - E \tag{3.128}$$

4.4.3. Bài toán điều khiển

Vì các quan hệ trong (3.127) và (3.128) tương ứng mô tả những thay đổi động của P và S, các phương trình này rõ ràng có thể dùng như các

phương trình chuyển động trong mô hình này. Khi đó, mô hình này hướng vào P (trữ lượng ô nhiễm) và S (trữ lượng nhiên liệu) như các biến trạng thái. Việc xem xét (3.127) và (3.128) kỹ lưỡng hơn cũng cho thấy rằng E (sử dụng năng lượng) và A (các hoạt động chống ô nhiễm) phải đóng vai trò các biến điều khiển trong phân tích hiện tại.

Nếu ta giữ nguyên hàm lợi ích như đã sử dụng trước đây:

$$U = U[C(E), P] \quad (U_C > 0,\ U_P < 0,\ U_{CC} < 0,\ U_{PP} < 0,\ C' > 0,\ C'' < 0) \quad (3.129)$$

(từ (3.74) và (3.72))

thì bài toán tối ưu động có thể phát biểu là:

$$\text{Cực đại} \quad \int_0^T U[C(E),P]\,dt \quad (3.130)$$

$$\text{với ràng buộc} \quad \dot{P} = \alpha E - \beta A - \delta P \quad (3.131)$$

$$\dot{S} = -A - E \quad (3.132)$$

$$P(0) = P_0 > 0 \quad P(T) \geq 0 \text{ tự do (T cho trước)} \quad (3.133)$$

$$S(0) = S_0 > 0 \quad S(T) \geq 0 \text{ tự do} \quad (3.134)$$

$$\text{và} \quad E \geq 0 \quad 0 \leq A \leq \hat{A} \quad (3.135)$$

Có hai khía cạnh của bài toán này đáng xem xét. Thứ nhất, trong khi các giá trị đầu của P và S là cố định và thời gian cuối T cũng cố định, các giá trị cuối của cả trữ lượng ô nhiễm P lẫn trữ lượng nguồn năng lượng S để tự do, chỉ chịu ràng buộc không âm. Điều đó có nghĩa là có một đường cuối thẳng đứng cụt đối với P và một đường cuối thẳng đứng cụt khác đối với S. Thứ hai, cả hai biến điều khiển E và A bị giới hạn trong các miền điều khiển tương ứng của chúng. Đối với E, miền điều khiển là $[0, \infty)$. Và đối với A, miền điều khiển là $[0, \hat{A}]$, ở đây $\hat{A}$ ký hiệu mức chấp nhận được cực đại của các hoạt động chống ô nhiễm. Vì những cân nhắc về ngân sách và các nhân tố khác có thể ngăn không cho theo đuổi việc làm sạch môi trường một cách không có giới hạn, giả thiết về một cận trên $\hat{A}$ là điều hợp lý.

4.4.4. Cực đại Hamilton

Như thường lệ, ta bắt đầu quá trình giải bằng cách viết hàm Hamilton:

$$H = U[C(E), P] + \lambda_P(\alpha E - \beta A - \delta P) - \lambda_S(A + E) \quad (3.136)$$

ở đây các chỉ số của mỗi biến hiệp trạng thái λ chỉ biến trạng thái đi đôi với nó. Để cực đại hoá H theo biến điều khiển E, ở đây E ≥ 0, điều kiện Kuhn-Tucker là ∂H/∂E ≤ 0, với điều kiện bù yếu E(∂H/∂E) = 0. Nhưng vì ta có thể loại bỏ trường hợp cực trị E = 0 (ngừng hoàn toàn sản xuất tiêu dùng), ta phải giả định E > 0. Khi đó từ điều kiện bù yếu suy ra rằng ta phải thoả mãn điều kiện:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_C C'(E) + \alpha\lambda_P - \lambda_S = 0 \qquad (3.137)$$

Lưu ý rằng $\partial^2 H/\partial E^2 = U_{CC}C'^2 + U_C C'' < 0$; nên H quả thực là cực đại chứ không cực tiểu.

Thêm vào đó, H phải cực đại theo A. Như (3.136) cho thấy, h là tuyến tính theo biến A, với:

$$\frac{\partial H}{\partial A} = -\beta\lambda_P - \lambda_S \qquad (3.138)$$

Ngoài ra, E bị giới hạn trong tập hợp điều khiển đóng [0, $\hat{A}$]. Như vậy, để cực đại H, nghiệm biên bên trái A* = 0 phải được chọn nếu ∂H/∂A âm, và nghiệm biên bên phải A* = $\hat{A}$ phải được chọn nếu ∂H/∂A dương. Nghĩa là,

$$\beta\lambda_P + \lambda_S \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0 \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{Bmatrix} \qquad (3.139)$$

Tuy nhiên, từ (3.137) ta thấy rằng:

$$\lambda_S = U_C C'(E) + \alpha\lambda_P$$

Thế biểu thức này vào (3.139) cho ta điều kiện khác:

$$U_C C'(E) \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} -(\alpha+\beta)\lambda_P \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{Bmatrix} \qquad (3.140)$$

Lựa chọn tối ưu của A phụ thuộc chặt chẽ vào λ_P.

4.4.5. Các lựa chọn chính sách

Sự lựa chọn tối ưu các hoạt động chống ô nhiễm hoặc là nghiệm *trong* hoặc là nghiệm *biên*. Forster chỉ ra rằng trong mô hình hiện tại không thể có nghiệm trong.

Để thấy điều đó, hãy xét các phương trình chuyển động của các biến hiệp trạng thái:

$$\dot{\lambda}_P = -\frac{\partial H}{\partial P} = -U_P + \delta\lambda_P \qquad (3.141)$$

$$\dot{\lambda}_S = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_S = \text{hằng số} \qquad (3.142)$$

Nếu A* là nghiệm trong thì:

$$\beta\,\lambda_P + \lambda_S = 0 \quad \text{(theo (3.139))} \qquad (3.143)$$

Vì λ_S là hằng số theo (3.142), phương trình cuối cùng này chỉ ra rằng λ_P cũng phải là một hằng số, mà đến lượt nó lại kéo theo:

$$\dot{\lambda}_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\lambda_P = U_P \quad \text{(theo (3.141))} \qquad (3.144)$$

Nhưng λ_P là một hằng số đòi hỏi U_P cũng là một hằng số. Vì U là đơn điệu theo P, có thể có chỉ một giá trị của P làm cho U_P nhận một giá trị hằng số cụ thể. Như vậy, P cũng phải là hằng số nếu A* là một nghiệm trong.

Khi cho trữ lượng ô nhiễm ban đầu $P_0 > 0$, có P là hằng số nghĩa là cố định trữ lượng ô nhiễm cuối ở mức $P(T) = P_0 > 0$. Đối với một bài toán với một đường thẳng cuối thẳng đứng cụt, điều kiện hoành là:

$$P(T)\,\lambda_P(T) = 0 \qquad (3.145)$$

Với một P(T) dương, nó đòi hỏi rằng $\lambda_P(T) = 0$, mà theo (3.144) vì λ_P là một hằng số, nghĩa là:

$$\lambda_P(t) = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, T] \qquad (3.146)$$

Nhưng theo (3.140), giá trị 0 đối với λ_p kéo theo là $U_C C'(E) = 0$, trái với các giả thiết rằng cả U_C và C' dương. Do đó, trong mô hình hiện tại, nghiệm trong đối với A* phải loại bỏ.

4.4.6. Các nghiệm biên đối với biến điều khiển A

Chỉ còn lại các chính sách là các nghiệm biên A* = 0 (không cố gắng đấu tranh chống ô nhiễm) hoặc $A^* = \hat{A}$ (giảm ô nhiễm ở mức khả thi tối đa). Hai chính sách này có nét chung là:

$$U_C C'(E) = \lambda_S - \alpha\lambda_P \quad \text{(từ (3.137))} \qquad (3.147)$$

Diễn giải về kinh tế, hiệu quả của việc sử dụng năng lượng lên mức lợi ích xã hội thông qua tiêu dùng, $U_C C'(E)$, dưới cả hai chính sách phải bằng giá trị bóng của sự giảm nguồn năng lượng, đo bởi λ_S, được điều chỉnh đối với giá trị bóng của ô nhiễm qua số hạng $-\alpha\lambda_P$. Nhưng hai chính sách khác nhau ở chỗ:

$$A^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{Bmatrix} \text{ đối với } \lambda_S \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} -\beta\lambda_P \text{ (theo (3.148))} \quad (3.148)$$

Ý nghĩa kinh tế của dòng thứ nhất trong (3.148) là chính sách phó mặc đối với ô nhiễm thích hợp cho tình huống trong đó giá bóng của nguồn năng lượng, λ_S, lớn hơn giá bóng của sự giảm ô nhiễm, đo bởi $-\beta\lambda_P$. Trong tình huống này, không đáng sử dụng các nguồn lực vào các hoạt động chống ô nhiễm bởi vì chi phí nguồn lực lớn hơn lợi ích. Nhưng, như chỉ ra trong dòng thứ hai, đấu tranh với ô nhiễm ở mức cực đại được chứng minh là đúng trong tình huống ngược lại. Để phân biệt giữa hai tình huống này, tham số β, đo hiệu quả của các hoạt động chống ô nhiễm, đóng một vai trò quan trọng.

Ta hãy xem xét kỹ thêm những hệ quả của trường hợp $A^* = 0$. Vì trữ lượng ô nhiễm được để phó mặc trong trường hợp này, trữ lượng cuối của ô nhiễm chắc chắn dương. Với $P(T) > 0$, điều kiện hoành $P(T)\,\lambda_P(T) = 0$ trong (3.145) kéo theo $\lambda_P(T) = 0$. Điều này gợi ý rằng λ_P, giá bóng của ô nhiễm, lúc ban đầu âm, phải tăng theo thời gian đến một giá trị cuối bằng 0 để thoả mãn điều kiện bù:

$$\dot{\lambda}_P > 0 \quad (3.149)$$

Bây giờ nếu ta lấy đạo hàm toàn phần (3.147) theo t, ta tìm được:

$$(U_{CC}C'^2 + U_C C'')\dot{E} = -\alpha\dot{\lambda}_P \quad (3.150)$$

Vì biểu thức trong ngoặc đơn là âm, $\dot{E}$ và $\dot{\lambda}_P$ có cùng dấu, nên ta có thể kết luận rằng:

$$\dot{E} > 0\,. \quad (3.151)$$

Trong tường hợp hiện tại, sử dụng năng lượng ngày càng tăng theo thời gian sẽ dẫn tới cạn kiệt nguồn năng lượng. Như (3.142) chỉ ra, λ_S là một hằng số – một hằng số dương bởi vì λ_S ký hiệu giá bóng của một nguồn tài

nguyên có giá trị. Tính dương của hằng số λ_S nghĩa là, để thoả mãn điều kiện hoành:

$$S(T)\,\lambda_S(T) = 0 \quad \text{(so sánh với (3.145))} \tag{3.152}$$

S(T) phải bằng 0, báo hiệu sự cạn kiệt trữ lượng nguồn năng lượng tại thời gian cuối T.

Trở lại chính sách thứ hai, ta có sự giảm ô nhiễm ở mức khả thi tối đa, $A^* = \hat{A}$. Tuy nhiên, dù cố gắng tối đa, chúng ta không kỳ vọng các hoạt động chống ô nhiễm đưa lượng ô nhiễm P về 0. Với giả thiết rằng $U_P < 0$ và $U_{PP} < 0$, ta biết rằng, khi P giảm ổn định do kết quả của các hoạt động chống ô nhiễm, U_p sẽ tăng ổn định từ một mức âm về 0. Khi trữ lượng P trở nên đủ nhỏ, U_P sẽ đạt mức có thể chịu được mà ở đó ta không còn có thể biện hộ cho chi phí các nguồn lực để cố gắng giảm thêm ô nhiễm nữa. Do đó ta có thể kỳ vọng lượng ô nhiễm cuối P(T) là dương. Nếu vậy, thì $\lambda_P(T) = 0$ do điều kiện bù yếu, và phần còn lại của vấn đề về định tính giống y như trường hợp $A^* = 0$.

D. CÁC BÀI TOÁN TẦM VÔ HẠN

Trong nghiên cứu của chúng ta về các bài toán phép tính biến phân, ta đã chỉ ra rằng việc mở rộng tầm kế hoạch ra vô hạn dẫn đến những sự phức tạp hoá nhất định về toán học. Có thể nói như vậy về các bài toán điều khiển tối ưu. Vấn đề chủ yếu là sự hội tụ của phiếm hàm mục tiêu mà, trong khuôn khổ tầm vô hạn, là một tích phân suy rộng. Nhưng vấn đề đang bàn là các điều kiện hoành tầm hữu hạn có thể được tổng quát hoá cho khung cảnh tầm vô hạn hay không. Có một số phản Thí dụ đã được đưa ra trong lý thuyết điều khiển tối ưu nghi ngờ về khả năng mở rộng như thế. Ta sẽ xem xét những phản thí dụ này và chỉ ra rằng những phản thí dụ này có thể chỉ là những chứng cứ bề ngoài.

I. CÁC ĐIỀU KIỆN HOÀNH

1.1. Điều kiện hoành

Trong công trình nổi tiếng của mình, Pontryagin và các đồng tác giả hầu như chỉ quan tâm tới các bài toán với tầm kế hoạch hữu hạn. Đoạn duy nhất đi ra ngoài khuôn khổ ấy là đoạn nói về trường hợp phiếm hàm tích

phân suy rộng ở bài toán ôtônôm, trong đó "điều kiện biên ở vô hạn" được giả thiết có dạng đặc biệt:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty \quad (y_\infty \text{ cho trước}) \tag{3.153}$$

Nói cách khác, tầm vô hạn được đưa ra kèm theo trạng thái cuối cố định. Đối với trường hợp đó ta có bài toán với đường cuối nằm ngang, người ta chỉ ra rằng nguyên lý cực đại và có thể áp dụng như đối với bài toán tầm hữu hạn. Đối với bài toán tầm hữu hạn, điều kiện hoành là:

$$[H]_{t=T} = 0 \tag{3.154}$$

Hơn nữa, khi bài toán là ôtônôm, giá trị cực đại của Hamilton là hằng số theo thời gian, nên điều kiện H = 0 có thể được kiểm chứng không chỉ tại t = T, mà tại bất kỳ thời điểm nào. Theo đó, điều kiện hoành ở bài toán ôtônôm tầm vô hạn với điều kiện biên (3.153) có thể đặt ra không chỉ như là:

$$\lim_{t\to\infty} H = 0 \tag{3.155}$$

mà rộng hơn:

$$H = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, \infty) \tag{3.156}$$

Do điều kiện hoành đối với bài toán đường cuối nằm ngang có thể mở rộng từ tầm hữu hạn sang tầm vô hạn, làm cho ta trông đợi rằng có thể làm như thế cho các bài toán khác. Thí dụ, nếu trạng thái cuối là tự do khi $t \to \infty$, ta có thể kỳ vọng điều kiện hoành tầm vô hạn là:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \quad \text{(điều kiện hoành đối với trạng thái cuối tự do)} \tag{3.157}$$

Tương tự, trong trường hợp trạng thái cuối phải thoả mãn một mức tối thiểu định trước y_{min} khi $t \to \infty$, ta có thể hy vọng điều kiện hoành tầm vô hạn là:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \ge 0 \text{ và } \lim_{t\to\infty} \lambda(t)[y(t) - y_{min}] = 0 \tag{3.158}$$

1.2. Quan điểm biến phân

Ta sẽ thấy rằng điều kiện hoành (3.157) là hợp lý bởi vì có thể thu được nó bằng cách mô phỏng thủ tục đã sử dụng trước đây để rút ra các điều kiện hoành đối với bài toán (3.20). Ở đó, đầu tiên ta kết hợp – qua

nhân tử Lagrange – phiếm hàm mục tiêu ban đầu V với phương trình chuyển động của y vào một phiếm hàm mới:

$$V = \int_0^T H(t,y,u,\lambda)dt - \int_0^T \lambda(t)\dot{y}dt \quad \text{(từ (3.22'))}$$

Rồi, sau khi lấy tích phân từng phần tích phân thứ hai, ta viết lại V là:

$$V = \int_0^T [H(t,y,u,\lambda) + y(t)\dot{\lambda}]dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 \quad \text{(từ (3.22''))}$$

Để tạo ra các đường đi lân cận của đường điều khiển tối ưu và đường trạng thái tối ưu, ta sử dụng các đường xao động p(t) và q(t):

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon\, p(t) \text{ và } y(t) = y^*(t) + \varepsilon\, q(t) \quad \text{(từ (3.24) và (3.25))}$$

Tương tự đối với biến T và Y_T, ta đã viết:

$$T = T^* + \varepsilon\,\Delta T \text{ và } y_T = y_T^* + \varepsilon\,\Delta y_T \quad \text{(từ (3.26))}$$

Từ đó, phiếm hàm V được chuyển thành một *hàm số* của ε. Điều kiện cấp một đối với cực đại V khi đó là:

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda}\right)q(t) + \frac{\partial H}{\partial u}p(t)\right]dt + [H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\Delta y_T = 0 \quad \text{(từ (3.30))}$$

Khi đưa vào khuôn khổ tầm vô hạn, phương trình này trở thành:

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \underbrace{\int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda}\right)q(t) + \frac{\partial H}{\partial u}p(t)\right]dt}_{\Omega_1} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} H\Delta T}_{\Omega_2} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\Delta y_T}_{\Omega_3} = 0 \quad (3.159)$$

Để thoả mãn điều kiện này, từng số hạng trong ba số hạng thành phần (Ω_1, Ω_2, Ω_3) phải triệt tiêu. Chính đòi hỏi triệt tiêu của hai số hạng cuối cùng, Ω_2 và Ω_3, làm tăng số các điều kiện hoành.

1.3. Tính khả biến của T và y_T

Đối với một bài toán tầm vô hạn, thời điểm cuối T không cố định, nên ΔT khác 0. Như vậy, để làm số hạng Ω_2 trong (3.159) triệt tiêu, ta phải đặt điều kiện:

$$\lim_{t\to\infty} H = 0 \text{ (điều kiện hoành tầm vô hạn)} \quad (3.160)$$

Điều kiện này trùng với (3.155). Tuy nhiên, không giống (3.155), (3.160) đóng vai trò một điều kiện hoành tổng quát đối với các bài toán tầm vô hạn, bất kể trạng thái cuối có là cố định hay không. Do đó, nó mang một ý nghĩa lớn hơn.

Ta hãy giải thích ý nghĩa kinh tế của điều kiện hoành này dựa theo mô hình của Dorfman. Ở mô hình này biến trạng thái biểu thị số vốn của một công ty, biến điều khiển biểu thị quyết định chính sách kinh doanh, hàm F biểu thị hàm lợi nhuận của công ty. Khi đó hàm Hamilton có ý nghĩa là tổng lợi nhuận trước mắt và tương lai gắn với mỗi quyết định chính sách kinh doanh chấp nhận được. Đòi hỏi $H \to 0$ khi $t \to \infty$ nghĩa là tất cả các cơ hội kiếm lợi nhuận sẽ được tận dụng khi $t \to \infty$. Đòi hỏi như vậy là hợp với trực quan bất kể trạng thái cuối (số vốn) của công ty có cố định hay không.

Mặt khác, về số hạng Ω_3 trong (3.159), y_T cố định hay tự do là có vấn đề. Trước hết, giả thiết trạng thái cuối cố định. Khi đó ta có $\lim_{t \to \infty} y_T = y_\infty$, y giống như trong (3.153). Vì điều này kéo theo $\Delta y_T = 0$ tại thời gian vô hạn, số hạng Ω_3 sẽ triệt tiêu mà không đòi hỏi bất kỳ ràng buộc nào đối với giá trị cuối của λ. Trái lại, với trạng thái cuối tự do, ta không có $\Delta y_T = 0$ tại thời gian vô hạn nữa. Do đó, để làm cho Ω_3 triệt tiêu, cần quy định điều kiện $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$, và điều này cho ta cơ sở hợp lý của điều kiện hoành (3.157).

Mặc dù nhiều tác giả coi vấn đề các điều kiện hoành tầm vô hạn như là chưa được giải quyết. Điều kiện hoành (3.160) không còn tranh cãi. Tuy nhiên, điều kiện hoành (3.153) – $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$ – bị nghi ngờ bởi một số tác giả khẳng định tìm thấy những phản thí dụ trong đó điều kiện này bị vi phạm. Nếu đúng, tất nhiên những phản thí dụ như vậy sẽ làm cho điều kiện này không đủ tư cách là một điều kiện hoành. Tuy nhiên, người ta đã chỉ ra rằng những phản thí dụ này không phải là những phản thí dụ thực sự, vì các bài toán liên quan không có một trạng thái cuối thực sự tự do, nên (3.157) trước hết không được áp dụng.

II. ĐIỀU KIỆN HOÀNH NHƯ MỘT PHẦN CỦA ĐIỀU KIỆN ĐỦ

Có một số các phản thí dụ như phản thí dụ của Halkin, của Karl Shell ... chỉ ra rằng điều kiện hoành (3.157) không áp dụng được, nhưng một số các nhà kinh tế khác chỉ ra rằng trong các thí dụ của Halkin hoặc Karl

Shell các phản thí dụ đó là không chính xác (tuy nhiên chúng ta không đi sâu vào vấn đề này ở đây).

Mặc dù điều kiện hoành $\lim_{t\to\infty}\lambda(t) = 0$ không được mọi người chấp thuận như một điều kiện cần đối với các bài toán tầm vô hạn, một điều kiện giới hạn liên quan tới λ tham gia như một phần của một điều kiện đủ dựa trên tính lõm đối với các bài toán này. Ở dạng hỗn hợp – kết hợp các điều kiện lõm của Mangasarian cũng như các điều kiện của Arrow - định lý đủ phát biểu rằng các điều kiện trong nguyên lý cực đại là đủ đối với cực đại toàn cục của V trong bài toán tầm vô hạn:

Cực đại $\quad V = \int_0^\infty F(t,y,u)\,dt \quad$ (3.161)

với ràng buộc $\quad \dot{y} = f(t,y,u) \quad$ (3.162)

và $\quad y(0) = y_0 \quad (y_0$ cho trước$) \quad$ (3.163)

với điều kiện là:

hoặc: $H = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ là lõm theo (y,u) với mọi $t \in [0, T]$, (3.164)

hoặc: $H^0 \equiv F(t, y, u^*) + \lambda f(t, y, u^*)$ là lõm theo y với mọi t,

đối với λ đã cho (3.165)

và $\quad \lim_{t\to\infty}\lambda(t)[y(t) - y^*(t)] \geq 0 \quad$ (3.166)

ở đây $y^*(t)$ ký hiệu đường đi trạng thái tối ưu và $y(t)$ là bất kỳ đường đi trạng thái chấp nhận được khác. Trạng thái cuối có thể hoặc cố định hoặc tự do.

Lưu ý rằng trong (3.165) ta đã gộp các điều kiện lõm của Mangasarian đối với các hàm F và f và điều kiện không âm đối với λ(t) vào một điều kiện lõm đơn đối với hamilton H. Tính lõm của H được hiểu là lõm theo (y, u) đồng thời. Trái lại, điều kiện Arrow là H^0 lõm theo riêng biến y.

Biểu thức giới hạn trong (3.166) là bản đối chiếu tầm vô hạn của biểu thức $\lambda^*(T)\ (y_T - y_{T^*})$ mà ta đã gặp trước đây trong chứng minh định lý Mangasarian. Trong chứng minh đó, biểu thức vừa dẫn được chỉ ra là triệt tiêu, nên có kết quả $V \leq V^*$, xác lập V^* là một cực đại toàn cục. Nhưng, để xác lập tính cực đại của V^*, trên thực tế cũng có thể chấp nhận có $\lambda^*(T)\ (y_T - y_T^*)$ dương. Đó là theo lý luận rằng điều kiện (3.166) hạn chế giới hạn của

$\lambda^*(t)$ $(y(t) - y^*(t))$ hoặc dương hoặc bằng 0 khi $t \to \infty$. Ta cũng có thể thấy lý thú khi so sánh (3.166) với (2.144), điều kiện tương ứng trong khuôn khổ phép tính biến phân. Thoạt nhìn, điều kiện (2.144) có thể đập vào mắt hoàn toàn khác với (3.166) bởi vì nó chỉ ra bất đẳng thức "≤" chứ không "≥". Tuy nhiên, từ (3.57) ta nhớ lại rằng $\lambda = -F_{y'}$. Rõ ràng rằng (3.166) và (2.144) thực sự chính xác là như nhau.

III. ỨNG DỤNG KINH TẾ - LÝ THUYẾT TĂNG TRƯỞNG TỐI ƯU TÂN CỔ ĐIỂN

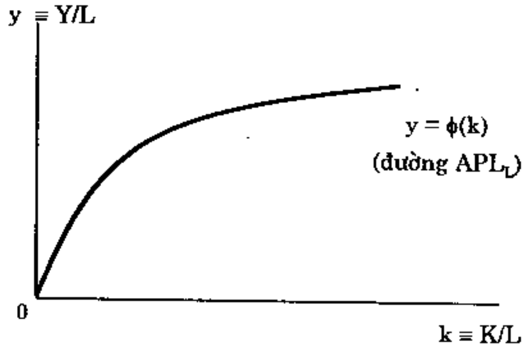
Mô hình Ramsey về hành vi tiết kiệm, để cập tới vấn đề quan trọng về phân bố nguồn lực qua thời gian, có ảnh hưởng mạnh đối với tư duy kinh tế, mặc dù ảnh hưởng này không có tác dụng cho đến sau chiến tranh thế giới thứ II, khi mô hình này "được phát hiện lại" sau khi nó được công bố rất lâu. Trong một phát triển mới đây hơn, cũng vấn đề cơ bản đó được trình bày như một bài toán điều khiển tối ưu chứ không như phép tính biến phân. Hơn nữa, nghiên cứu mới - được gán nhãn "lý thuyết tăng trưởng tối ưu tân cổ điển" – mở rộng mô hình Ramsey trong hai khía cạnh chủ yếu: (1) lực lượng lao động (được đồng nhất với dân số) được giả định là tăng với tốc độ hằng số cho trước $n > 0$ (mô hình Ramsey có $n = 0$), và (2) lợi ích xã hội được giả định là được chiết khấu theo thời gian với hệ số chiết khấu $\rho > 0$ (mô hình Ramsey có $\rho = 0$).

3.1. Mô hình

Lý thuyết này được gọi là lý thuyết "tân cổ điển", bởi vì khuôn khổ phân tích của nó xoay quanh hàm sản xuất tân cổ điển $Y = Y(K, L)$, giả định là công nghệ sản xuất được đặc trưng bằng hiệu quả không đổi theo quy mô, sản phẩm biên dương và hiệu quả giảm dần theo mỗi đầu vào. Một hàm sản xuất như vậy, là thuần nhất tuyến tính, có thể được viết lại theo các đại lượng tính cho một công nhân – hay trên đầu người, khi ta không phân biệt giữa dân số và lực lượng lao động.

$$y = \frac{Y}{L} \qquad \text{(sản phẩm trung bình của lao động)}$$

$$k = \frac{K}{L} \qquad \text{(tỷ lệ vốn - lao động)}$$



Hình 3.9

Ta có thể biểu thị hàm sản xuất bởi:

$$y = \phi(k) \quad \text{với } \phi'(k) > 0 \text{ và } \phi''(k) < 0 \quad \text{với mọi } k > 0 \qquad (3.167)$$

Thêm vào đó, giả định rằng:

$$\lim_{k\to 0} \phi'(k) = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{k\to\infty} \phi'(k) = 0 \qquad (3.168)$$

Đồ thị của $\phi(k)$ - đường cong APP_L theo tỷ lệ vốn - lao động – có hình dạng tổng quát minh hoạ trong Hình 3.9.

Tổng đầu ra Y được phân bổ hoặc cho tiêu dùng C hoặc cho tổng đầu tư I_g. Do đó, đầu tư ròng $I = \dot{K}$, có thể được biểu diễn là:

$$\dot{K} = I_g - \delta K = Y - C - \delta K \quad (\delta \text{ là tỷ lệ hao mòn}). \qquad (3.169)$$

Chia cả hai vế cho L, và sử dụng ký hiệu c = C/L đối với tiêu dùng trên đầu người, ta có:

$$\frac{1}{L}\dot{K} = y - c - \delta k = \phi(k) - c - \delta k \qquad (3.170)$$

Vế phải bây giờ chỉ chứa các biến trên đầu người, nhưng vế trái thì không. Để thống nhất hai vế, ta sử dụng quan hệ:

$$\begin{aligned}\dot{K} &\equiv \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = k\frac{dL}{dt} + L\frac{dk}{dt} \quad \text{(quy tắc tích)}\\ &= knL + L\dot{k} \qquad \left(n \equiv \frac{dL/dt}{L}\right)\\ &= L(kn + \dot{k}) \qquad (3.171)\end{aligned}$$

Thay kết quả cuối cùng này vào (3.170) và sắp xếp lại, cuối cùng ta được một phương trình chỉ chứa các biến là các đại lượng trên đầu người:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \qquad (3.172)$$

Phương trình này, mô tả tỷ lệ vốn - lao động k thay đổi thế nào qua thời gian, là phương trình vi phân cơ bản của lý thuyết tăng trưởng tân cổ điển.

Mức tiêu dùng trên đầu người c là đại lượng xác định mức lợi ích hay phúc lợi của xã hội tại một thời gian bất kỳ. Hàm lợi ích xã hội U(c) được giả định có các tính chất sau:

$$U'(c) > 0 \quad U''(c) < 0 \quad \text{với mọi } c > 0 \qquad (3.173)$$

$$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{c \to \infty} U'(c) = 0 \qquad (3.174)$$

Tất nhiên, hàm U(c) được lấy tổng theo thời gian trong bài toán tối ưu hoá động. Nhưng vì dân số (lực lượng lao động) tăng với tốc độ n, nên mức lợi ích xã hội đạt được tại thời điểm bất kỳ phải được gán trọng số bởi quy mô dân số tại thời gian đó trước khi lấy tổng. Vì vậy, với hệ số chiết khấu ρ, hàm mục tiêu có dạng:

$$\int_0^\infty U(c)L(t)e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty U(c)L_0e^{nt}e^{-\rho t}dt$$

$$= L_0\int_0^\infty U(c)L_0e^{-(\rho-n)t}dt \qquad (3.175)$$

Để đảm bảo hội tụ, ta giả thiết rằng $\rho - n > 0$. Tuy nhiên, có thể chỉ ra rằng điều này tương đương với việc cho một hệ số chiết khấu dương r, ở đây $r \equiv \rho - n$. Nếu, thêm nữa, ta đặt $L_0 = 1$ bằng cách chọn đơn vị, thì phiếm hàm sẽ rút gọn về dạng đơn giản:

$$\int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt \qquad (r \equiv \rho - n > 0) \qquad (3.176)$$

Nói cách khác, việc đánh trọng số đối với phúc lợi xã hội bởi quy mô dân số và đồng thời đòi hỏi hệ số chiết khấu lớn hơn tốc độ tăng dân số n, về toán học không khác với phương án không sử dụng trọng số dân số nhưng chấp thuận một hệ số chiết khấu dương mới r. Vì vậy, ta sẽ tiếp tục trên cơ sở phương án đơn giản hơn (3.176).

Như vậy bài toán tăng trưởng tối ưu đơn giản là:

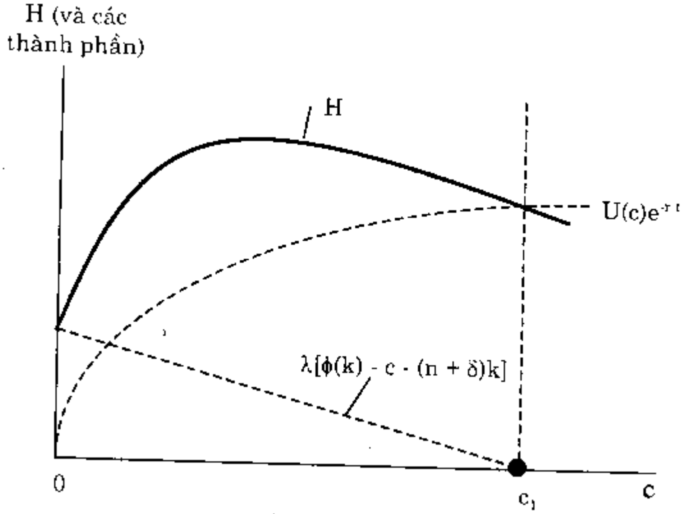
$$\text{Cực đại} \quad \int_0^\infty U(c)e^{-rt}\,dt \qquad (3.177)$$

với ràng buộc $\dot{k} = \phi(k) - c - (n + \delta)k$ (3.178)

$$k(0) = k_0 \quad (3.179)$$

và $0 \leq c(t) \leq \phi[k(t)]$ (3.180)

Ở đây chỉ có một biến trạng thái k và một biến điều khiển c.



Hình 3.10

3.2. Nguyên lý cực đại

Hamilton đối với bài toán này,

$$H = U(c)e^{-rt} + \lambda[\phi(k) - c - (n + \delta)k] \quad (3.181)$$

là phi tuyến theo c. Cụ thể hơn, tại bất kỳ thời điểm đã cho, thành phần cộng tính thứ nhất của H có đồ thị theo c như đường cong đứt nét minh hoạ trong Hình 3.10 và thành phần thứ hai có dạng như đường thẳng đứt nét. Tổng của chúng, H, có một bướu với đỉnh tại một giá trị c giữa c = 0 và $c = c_1$. Vì c_1 là nghiệm phương trình $[\phi(k) - c - (n + \delta)k] = 0$, suy ra $c_1 = \phi(k) - (n + \delta)k$, nên $c_1 < \phi(k)$. Vì vậy, cực đại của H tương ứng với một giá trị của c là điểm trong của miền điều khiển $[0, \phi(k)]$. Theo đó ta có thể tìm cực đại của H bằng cách đặt:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-rt} - \lambda = 0$$

Từ đó ta thu được điều kiện:

$$U'(c) = \lambda e^{rt} \quad (3.182)$$

Điều kiện này nói rằng, ở tối ưu, mức lợi ích biên của tiêu dùng trên đầu người phải bằng giá bóng của vốn được khuếch đại bởi số hạng mũ e^{rt}. Vì $\partial^2 H/\partial c^2 = U''(c)e^{rt}$ âm theo (3.174), H quả thực được cực đại hoá.

Nguyên lý cực đại cần có hai phương trình chuyển động. Một trong chúng, $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial k$, đối với mô hình hiện tại dẫn đến phương trình vi phân:

$$\dot{\lambda} = -\lambda[\phi'(k) - (n + \delta)] \tag{3.183}$$

Và phương trình kia, $\dot{k} = \partial H/\partial \lambda$, đơn giản là phát biểu lại ràng buộc:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \tag{3.184}$$

Ba phương trình (3.182) đến (3.184), trên nguyên tắc phải giúp ta giải ra được đối với ba biến c, λ, và k. Tuy nhiên, không có thông tin về các dạng cụ thể của các hàm U(c) và φ(k), ta chỉ có thể phân tích định tính của mô hình.

Tất nhiên, cũng có thể sử dụng Hamilton theo giá trị hiện thời:

$$H_c = U(c) + m[\phi(k) - c - (n + \delta)k] \quad \text{(theo (3.90)} \tag{3.185}$$

Trong trường hợp này, nguyên lý cực đại đòi hỏi rằng $\partial H_c/\partial c = U'(c) - m = 0$, hay:

$$m = U'(c) \tag{3.186}$$

Điều kiện này làm cực đại H_C, bởi vì $\partial^2 H_c/\partial c^2 = U''(c) < 0$ theo (3.174).

Phương trình chuyển động đối với biến trạng thái k có thể đọc trực tiếp từ dòng thứ hai của bài toán (3.177)-(3.180), nhưng nó cũng có thể được rút ra bởi:

$$\dot{k} = \frac{\partial H_c}{\partial m} = \phi(k) - c - (n + \delta)k \tag{3.187}$$

Và phương trình chuyển động đối với nhân tử tính cho giá trị hiện thời m là:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -\frac{\partial H_c}{\partial k} + rm = -m[\phi'(k) - (n + \delta)] + rm \quad \text{(theo (3.93))} \\ &= -m[\phi'(k) - (n + \delta + r)] \end{aligned} \tag{3.188}$$

Trình bày sau đây sẽ dựa trên các điều kiện nguyên lý cực đại theo giá trị hiện thời (3.186) đến (3.188). Vì không có đối số t tường minh nào trong các điều kiện này bài toán của ta là ôtônôm. Điều đó giúp ta phân tích định tính dựa trên biểu đồ pha như đã làm.

3.3. Vẽ đồ thị pha

Vì hai phương trình vi phân (3.187) và (3.188) chứa các biến k và m, đồ thị pha được vẽ trong không gian km. Để vẽ đồ thị như vậy, đầu tiên ta khử biến c. Vì phương trình (3.186), chứa một hàm của c – tức là, U'(c) – thay vì chính c, nên việc khử biến c phức tạp hơn so với khử m. Do đó ta sẽ cố gắng khử biến m và đi đến một phương trình vi phân theo biến c. Sau đó có thể phân tích dựa trên đồ thị pha trong không gian kc.

Lấy đạo hàm (3.186) theo t ta thu được một biểu thức đối với $\dot{m}$:

$$\dot{m} = U''(c)\dot{c}\,.$$

Biểu thức này, cùng với phương trình m = U'(c), giúp ta khử $\dot{m}$ và m khỏi (3.188). Kết quả sau khi sắp xếp lại là:

$$\dot{c} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}[\phi'(k) - (n + \delta + r)]$$

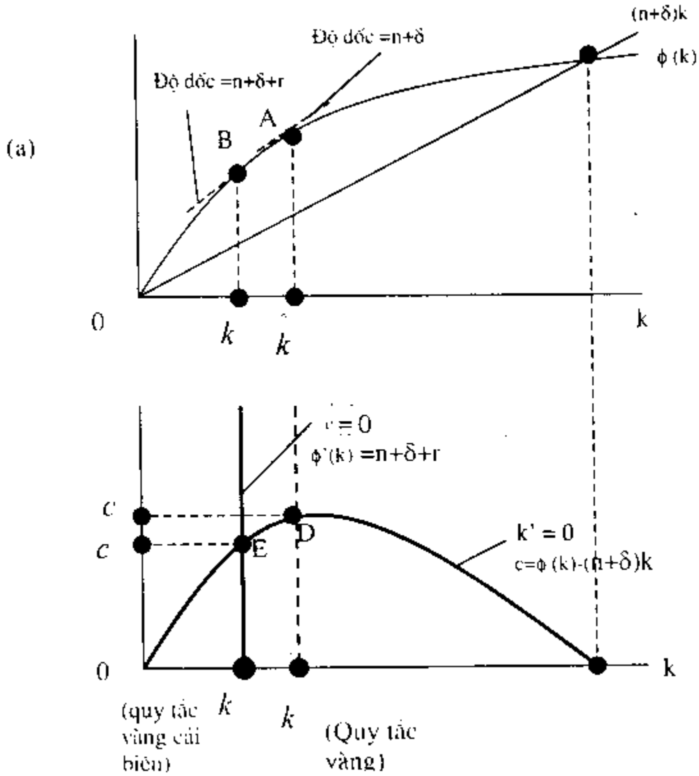
Đó là một phương trình vi phân theo biến c. Do đó, bây giờ ta có thể làm việc với hệ phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \phi(k) - c - (n + \delta)k \\ \dot{c} &= -\frac{U'(c)}{U''(c)}[\phi'(k) - (n + \delta + r)] \end{aligned} \qquad (3.189)$$

Để xây dựng biểu đồ pha, đầu tiên ta vẽ đường cong $\dot{k} = 0$ và đường cong $\dot{c} = 0$. Các đường này được xác định bởi hai phương trình:

$c = \phi(k) - (n + \delta)\, k$ (phương trình đối với đường cong $\dot{k} = 0$) (3.90)

$\phi'(k) = n + \delta + r$ (phương trình đối với đường cong $\dot{c} = 0$) (3.191)



Hình 3.13

Đường cong $\dot{k} = 0$ biểu diễn trong không gian kc là một đường cong lõm, như minh hoạ trong Hình 3.11b. Như (3.190) đã chỉ ra, đường cong này biểu diễn c như hiệu giữa hai hàm số của k: $\phi(k)$ và $(n + \delta)k$. Đồ thị của $\phi(k)$, đã gặp trước đây trong Hình 3.9, được vẽ lại trong Hình 3.11a. Và số hạng $(n + \delta)k$ đơn giản cho ta một đường thẳng dốc lên. Vẽ đồ thị của hiệu số hai đường này cho ta đường cong $\dot{k} = 0$ mong muốn trong Hình 3.11b. Về đường $\dot{c} = 0$, phương trình (3.191) đòi hỏi rằng nó là đường thẳng đi qua điểm $\overline{k}$ mà tại đó đường $\phi(k)$ có độ dốc $\phi'(k)$ nhận giá trị đặc biệt $n + \delta + r$. Khi đường cong $\phi(k)$ là đơn điệu, đòi hỏi này có thể thoả mãn chỉ tại một điểm trên đường cong đó, điểm B, tương ứng với một giá trị k duy nhất, $\overline{k}$.

Giao của hai đường cong trên Hình 3.11b, tại điểm E, xác định giá trị trạng thái ổn định của k và c, lần lượt được ký hiệu là $\overline{k}$ và $\overline{c}$. Các giá trị này gọi là các giá trị *quy tắc vàng cải biên* của tỷ lệ vốn-lao động và tiêu dùng trên đầu người, phân biệt với các giá trị quy tắc vàng $\hat{k}$ và $\hat{c}$ trong đó

$\hat{k}$ được định nghĩa bởi $\phi'(\hat{k}) = n + \delta$. Như vậy nó tương ứng với điểm A trên đường cong $\phi(k)$ trong Hình 3.13a, ở đây tiếp tuyến với đường cong đó song song với đường thẳng $(n+\delta)k$. Trái lại, $\bar{k}$ được định nghĩa bởi $\phi'(\bar{k}) = n + \delta + r$, theo (3.191), gắn với một độ dốc lớn hơn của $\phi(k)$. Đó là lý do điểm B (đối với $\bar{k}$) phải nằm ở bên trái điểm A (đối với $\hat{k}$). Nói cách khác, giá trị quy tắc vàng cải biên của k (trên cơ sở chiết khấu theo thời gian với hệ số r) phải nhỏ hơn giá trị quy tắc vàng của k (không xét đến chiết khấu). Tương tự, giá trị quy tắc vàng cải biên của c - độ cao của điểm E trong Hình 3.11b – phải nhỏ hơn giá trị quy tắc vàng - độ cao của điểm D.

3.4. Phân tích đồ thị pha

Để chuẩn bị cho phân tích đồ thị pha, trong Hình 3.12, ta thêm các đường khung thẳng đứng cho đường cong $\dot{k} = 0$, và các đường khung nằm ngang cho đường cong $\dot{c} = 0$. Các đường khung này giúp ích trong việc hướng dẫn vẽ các luồng - để nhắc nhở chúng ta rằng các luồng phải cắt đường cong $\dot{k} = 0$ với độ dốc vô hạn và cắt đường cong $\dot{c} = 0$ với độ dốc bằng 0.

Để có ý tưởng về những hướng tổng quát mà các luồng phải theo, ta lấy đạo hàm riêng của hai phương trình vi phân trong (3.189) để được

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0 \tag{3.192}$$

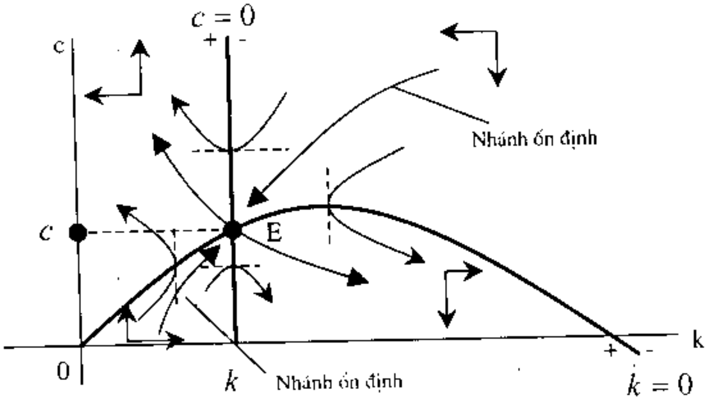
$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}\phi''(k) < 0 \qquad \text{[theo (3.188) và (3.185)]} \tag{3.193}$$

Theo (3.192), khi c tăng (đi về phía bắc), $\dot{k}$ phải theo dãy dấu (+, 0, -). Cho nên, các đầu mũi tên đối với k ở phía dưới đường cong $\dot{k} = 0$ phải chỉ về đông, và ở phía trên nó phải chỉ về tây. Tương tự, (3.193) chỉ rằng $\dot{c}$ phải theo dãy dấu (+, 0, -) khi k tăng (đi về đông). Vì vậy, các đầu mũi tên đối với c ở bên trái đường cong $\dot{c} = 0$ phải chỉ lên trên, và ở bên phải nó phải chỉ xuống.

Các luồng vẽ theo các hướng mũi tên như vậy mang lại một điểm cân bằng kiểu yên ngựa tại điểm E, $(\bar{k}, \bar{c})$, ở đây $\bar{k}$ và $\bar{c}$ ký hiệu các giá trị cân bằng liên thời gian của k và c tương ứng. Tính hằng số của $\bar{k}$ kéo theo $\bar{y} = \phi(\bar{k})$ cũng là hằng số. Vì k≡K/L và y≡Y/L, $\bar{k}$ và $\bar{y}$ đồng thời là hằng số có nghĩa là, tại E, các biến Y, K và L tăng với cùng tốc độ. Sự kiện Y và K có

chung một tốc độ tăng trưởng là đặc biệt quan trọng như một điều kiện thiết yếu của một trạng thái ổn định hay cân bằng tăng trưởng. Với dạng đã cho của các đường cong $\dot{k} = 0$ và $\dot{c} = 0$ trong bài toán này, trạng thái ổn định là duy nhất.

Nhận xét rằng con đường duy nhất mà một nền kinh tế có thể di chuyển về phía cân bằng ổn định là đi tới một trong các nhánh ổn định – "con đường lát gạch vàng" – dẫn tới điểm E. Điều này có nghĩa là, khi cho một tỷ lệ vốn-lao động k_0, phải chọn một mức tiêu dùng trên đầu người c_0 sao cho cặp có thứ tự (k_0,c_0) – không được chỉ ra trên đồ thị – nằm trên nhánh ổn định. Nếu không, các lực động của mô hình sẽ đưa ta tới tình huống hoặc (1) k luôn tăng đi đôi với c luôn giảm (dọc theo các luồng chỉ về hướng đông nam), hoặc (2) c luôn tăng đi đôi với k luôn giảm (dọc theo các luồng chỉ về hướng tây bắc). Tình huống (1) nghĩa là chính sách thắt lưng buộc bụng ngày càng nghiêm ngặt, cuối cùng lên đến cực điểm ở sự chết đói, còn tình huống (2) nghĩa là tiêu dùng quá buông thả, cuối cùng dẫn tới sự cạn kiệt vốn. Bởi vì không tình huống nào trong hai tình huống này có thể sống còn ở dài hạn, nên trạng thái ổn định tại E, với mức tiêu dùng trên đầu người không đổi bền vững, là mục tiêu dài hạn có ý nghĩa duy nhất đối với nền kinh tế biểu thị trong mô hình hiện tại.



Hình 3.12

Có thể nhận xét rằng ngay cả tại E tiêu dùng trên đầu người trở thành hằng số và mức của nó không thể tăng thêm cùng với thời gian. Đó là vì trong mô hình giả định một hàm sản xuất tĩnh: Y = Y(K,L). Để có thể tăng

tiêu dùng trên đầu người, phải đưa vào tiến bộ công nghệ.

3.5. Các điều kiện hoành

Chọn một nhánh ổn định trong họ các luồng là tương đương với chọn một nghiệm cụ thể từ họ các nghiệm tổng quát bằng việc xác định hằng số tuỳ ý. Điều này được thực hiện với sự giúp đỡ của một số điều kiện biên. Đòi hỏi chọn một giá trị ban đầu c_0 đặc biệt sao cho cặp (k_0,c_0) nằm trên nhánh ổn định là một cách để làm như vậy. Một cách khác là xem xét các điều kiện hoành thích hợp. Tuy nhiên, vì chúng ta đang làm việc với các hàm tổng quát và không làm việc với các nghiệm định lượng của các phương trình vi phân, khó mà minh hoạ việc sử dụng một điều kiện hoành để xác định một hằng số tuỳ ý. Tuy nhiên, dưới ánh sáng của phân tích đồ thị pha, ta có thể kiểm chứng rằng nghiệm trạng thái ổn định thực sự thoả mãn các điều kiện hoành mà ta kỳ vọng.

Một điều kiện hoành mà ta có thể kỳ vọng nghiệm trạng thái ổn định sẽ thoả mãn là

$$\lambda \to 0 \text{ khi } t \to \infty \quad \text{[theo (3.157)]} \qquad (3.194)$$

Đó là vì phiếm hàm mục tiêu không chứa thừa số chiết khấu và trạng thái cuối là tự do. Vì đường đi nghiệm đối với λ trong mô hình là

$$\lambda^* = U'(c^*)e^{-rt} \quad \text{[theo (3.182)]}$$

và vì giới hạn của $U'(c^*)$ là hữu hạn khi $t \to \infty$, biểu thức này thoả mãn điều kiện hoành (3.194).

Một điều kiện khác mà ta có thể kỳ vọng là,

$$H \to 0 \text{ khi } t \to \infty \text{ [theo (3.160)]} \qquad (3.195).$$

Đối với bài toán hiện tại, đường đi nghiệm đối với H có dạng

$$H^* = U(c^*)e^{-rt} + \lambda^*[\phi(k^*) - c^* - (n+\delta)k^*] \quad \text{[theo (3.181)]}$$

Vì $U(c^*)$ là hữu hạn khi $t \to \infty$, số hạng mũ $U(c^*)e^{-rt}$ tiến tới 0 khi t tiến ra vô hạn. Trong số hạng còn lại, từ (3.194) ta đã biết rằng λ^* tiến tới 0; hơn nữa, biểu thức trong ngoặc vuông, biểu diễn $\dot{k}$ bởi (3.189), bằng 0 theo định nghĩa trạng thái ổn định. Do đó, điều kiện hoành (3.195) cũng thoả mãn.

3.6. Kiểm tra điểm yên ngựa bằng các nghiệm đặc trưng

Trong Hình 3.12, hình dạng của các luồng đã được vẽ đưa ta đến kết luận rằng cân bằng tại E là một điểm yên ngựa. Vì khung của các luồng được xây dựng trên cơ sở định tính, với phạm vi rộng đáng kể trong việc định vị các đường cong, có thể nên kiểm tra lại tính vững chắc của kết luận bằng các phương tiện khác. Ta có thể làm việc đó bằng cách xét các nghiệm đặc trưng của hệ tuyến tính hoá của hệ phương trình vi phân (phi tuyến) của mô hình.

Trên cơ sở hệ hai phương trình (3.189):

$$\dot{k} = \phi(k) - c - (n+\delta)k$$

$$\dot{c} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}[\phi'(k) - (n+\delta+r)]$$

trước tiên ta lập ma trận Jacobi và lấy giá trị của nó tại điểm trạng thái ổn định E, hoặc ($\bar{k}$, $\bar{c}$),

$$J_E = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\dot{k}}{\partial k} & \dfrac{\partial\dot{k}}{\partial c} \\ \dfrac{\partial\dot{c}}{\partial k} & \dfrac{\partial\dot{c}}{\partial c} \end{bmatrix}_{(\bar{k},\bar{c})} \tag{3.196}$$

Bốn đạo hàm riêng, khi lấy giá trị tại E, ở đây $\phi'(k) = n + \delta + r$, là (3.197)

$$\left.\frac{\partial\dot{k}}{\partial c}\right|_E = -1 < 0 \tag{3.198}$$

$$\left.\frac{\partial\dot{c}}{\partial k}\right|_E = -\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})}\phi''(\bar{k}) < 0 \tag{3.199}$$

$$\left.\frac{\partial\dot{c}}{\partial c}\right|_E = \frac{-[U''(\bar{c})]^2 + U'''(\bar{c})U'(\bar{c})}{[U''(\bar{c})]^2}[\phi'(\bar{k}) - (n+\delta+r)] = 0$$

Suy ra rằng ma trận Jacobi có dạng

$$J_E = \begin{bmatrix} r & -1 \\ \dfrac{-U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})}\phi''(\bar{k}) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.196'}$$

Thông tin định tính mà ta cần về các nghiệm đặc trưng r_1 và r_2 để khẳng định điểm yên ngựa được chứa đựng trong kết quả này,

$$r_1 r_2 = |J_E| = -\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})}\phi''(\bar{k}) < 0 \tag{3.200}$$

Điều này hàm ý rằng hai nghiệm đặc trưng có dấu ngược nhau, xác lập trạng thái ổn định là một điểm yên ngựa địa phương.

E. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CÓ RÀNG BUỘC

Trước đây ta đã gặp các ràng buộc khi xét đến các loại đường thẳng cuối, kể cả các đường thẳng cuối cụt. Các ràng buộc này chỉ liên quan với những gì xảy ra ở những điểm đầu mút của đường đi, và các điều kiện được phát triển để xử lý chúng về bản chất là các điều kiện hoành. Trong phần này, ta trở lại các ràng buộc áp dụng suốt kỳ kế hoạch [0,T].

Như trong phép tính biến phân, việc xử lý các ràng buộc trong lý thuyết điều khiển tối ưu dựa nhiều vào kỹ thuật nhân tử Lagrange. Nhưng vì các bài toán điều khiển tối ưu không chỉ chứa các biến trạng thái mà còn chứa các biến điều khiển, cần phân biệt giữa hai nhóm ràng buộc chính. Trong nhóm thứ nhất, các biến điều khiển có trong các ràng buộc, hoặc có hoặc không có các biến trạng thái. Trong nhóm thứ hai, các biến điều khiển vắng mặt, nên các ràng buộc chỉ tác động đối với các biến trạng thái. Như ta sẽ thấy, các phương pháp xử lý đối với hai nhóm là khác nhau.

I. NHỮNG RÀNG BUỘC CÓ CHỨA CÁC BIẾN ĐIỀU KHIỂN

Trong nhóm ràng buộc thứ nhất – những ràng buộc có biến điều khiển – có thể xét bốn loại cơ bản: Các ràng buộc đẳng thức, các ràng buộc bất đẳng thức, các ràng buộc đẳng thức tích phân và các ràng buộc bất đẳng thức tích phân. Nói chung ta sẽ đưa các biến trạng thái vào các ràng buộc cùng với các biến điều khiển, nhưng phương pháp xử lý thảo luận trong mục này áp dụng được ngay cả khi các biến trạng thái không có mặt.

1.1. Các ràng buộc đẳng thức

Giả sử trong một bài toán có hai biến điều khiển, u_1 và u_2, mà chúng đòi hỏi thoả mãn điều kiện

$$g(t, y, u_1, u_2) = c$$

Ta sẽ gọi hàm g là hàm ràng buộc, và hằng số c là hằng số ràng buộc thì bài toán điều khiển có thể phát biểu là

Cực đại $\int_0^T F(t,y,u_1,u_2)\,dt$ (3.201.1)

thoả mãn $\dot{y} = f(t,y,u_1,u_2)$ (3.201.2)

$g(t,y,u_1,u_2) = c$ (3.201.3)

và các điều kiện biên (3.201.4)

Đây là một dạng đơn giản của bài toán với m biến điều khiển và q ràng buộc đẳng thức, ở đây đòi hỏi q < m.

Nguyên lý cực đại đòi hỏi cực đại hoá Hamilton

$$H = F(t,y,u_1,u_2) + \lambda(t)\,f(t,y,u_1,u_2) \qquad (3.202)$$

với mọi $t \in [0,T]$. Nhưng lần này điểm cực đại của H phải thoả mãn ràng buộc $g(t,y,u_1,u_2) = c$. Do đó ta đặt biểu thức Lagrange

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= H + \theta(t)[c - g(t,y,u_1,u_2)]\\ &= F(t,y,u_1,u_2) + \lambda(t)f(t,y,u_1,u_2) + \theta(t)[c - g(t,y,u_1,u_2)] \qquad (3.203)\end{aligned}$$

ở đây, nhân tử Lagrange θ, là một hàm của t. Điều này cần thiết là vì ràng buộc g phải thoả mãn tại mọi t trong kỳ kế hoạch. Giả thiết có nghiệm trong cho mỗi u_j, ta đòi hỏi rằng

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u_j} - \theta\frac{\partial g}{\partial u_j} = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0,T] \quad (j = 1, 2) \qquad (3.204)$$

Đồng thời ta cũng đòi hỏi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = c - g(t,y,u_1,u_2) = 0 \quad \text{với mọi } t \in [0,T] \qquad (3.205)$$

để đảm bảo rằng ràng buộc sẽ luôn có hiệu lực. Cả (3.204) và (3.205) tạo thành điều kiện cấp một đối với điểm cực đại có điều kiện của H. Tất nhiên, điều này phải được giúp thêm bằng một điều kiện cấp hai thích đáng hoặc một điều kiện lõm thích hợp.

Phần còn lại của các điều kiện trong nguyên lý cực đại gồm:

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\left(= \frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) \text{ (phương trình chuyển động đối với y)} \qquad (3.206)$$

và

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\left(= -\frac{\partial H}{\partial y} + \theta\frac{\partial g}{\partial y}\right) \text{(phương trình chuyển động đối với } \lambda) \qquad (3.207)$$

và một điều kiện hoành thích hợp. Ta thấy rằng phương trình chuyển động đối với y, (3.206), là như nhau dù ta lấy vi phân hàm Lagrange (Hamilton được thêm thành phần mới) hay hàm Hamilton gốc theo λ. Trái lại, sẽ có sự khác nhau trong phương trình chuyển động đối với λ, (3.207), khi ta lấy vi phân $\mathcal{L}$ hoặc H theo y. Lựa chọn đúng là biểu thức Lagrange $\mathcal{L}$. Đó là vì, với ràng buộc (3.201) đã cho, thì biến y làm thay đổi phạm vi lựa chọn của các biến điều khiển, và phải tính đến những ảnh hưởng như vậy trong việc xác định đường đi đối với biến hiệp trạng thái λ.

Khi giải bài toán với các ràng buộc đẳng thức giải được theo cách đã nói ở trên thì trong thực hành, việc sử dụng phép thế để giảm bớt số biến phải xử lý thường là đơn giản hơn. Do đó nên dùng phương pháp thế bất cứ khi nào có thể.

1.2. Các ràng buộc bất đẳng thức

Phương pháp thế không dễ dàng áp dụng được cho các bài toán với các ràng buộc bất đẳng thức, nên cần có một thủ tục khác đối với bài toán này.

Đầu tiên ta để ý rằng khi ràng buộc g có dạng bất đẳng thức, không cần phải nhất thiết là số biến điều khiển lớn hơn số ràng buộc. Đó là vì các ràng buộc bất đẳng thức cho ta phạm vi để lựa chọn rộng hơn nhiều so với các ràng buộc ở dạng đẳng thức chặt. Để đơn giản, ta sẽ minh hoạ loại bài toán này với hai biến điều khiển và hai ràng buộc bất đẳng thức:

Cực đại $\quad \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)\,dt \qquad (3.208.1)$

thoả mãn $\quad \dot{y} = f(t,y,u_1,u_2) \qquad (3.208.2)$

$g^1(t,y,u_1,u_2) \le c_1 \qquad (3.208.3)$

$g^2(t,y,u_1,u_2) \le c_2 \qquad (3.208.4)$

và các điều kiện biên $\qquad (3.208.5)$

Hamilton định nghĩa trong (3.202) vẫn đúng đối với bài toán hiện tại. Nhưng vì bây giờ Hamilton được cực đại hoá theo u_1 và u_2 thoả mãn hai ràng buộc *bất đẳng thức*, ta cần đến các điều kiện Kuhn-Tucker. Ngoài ra, để các điều kiện này là điều kiện cần, chúng phải thoả mãn cái gọi là tiêu

chuẩn chất lượng đối với ràng buộc. Theo định nghiã trong định lý của Arrow, Hurwicz và Uzawa. Ràng buộc có một trong các tính chất sau được nói là thoả mãn tiêu chuẩn " chất lượng":

(1) Tất cả các hàm ràng buộc g^i là lõm theo các biến điều khiển u_j [ở đây, lõm theo (u_1,u_2)]

(2) Tất cả các hàm g^i là tuyến tính theo các biến u_i [ở đây, tuyến tính theo (u_1,u_2)] – trường hợp đặc biệt của (1).

(3) Tất cả các hàm ràng buộc g^i là lồi theo các biến điều khiển u_j. Và, ngoài ra, tồn tại một điểm trong miền điều khiển $u_0 \in \mathscr{U}$ [ở đây, u_0 là điểm (u_{10},u_{20})] sao cho khi lấy giá trị tại u_0, tất cả các ràng buộc $g^i < c_i$. (Nghĩa là, tập hợp ràng buộc có miền trong không rỗng.)

(4) Các hàm g^i thoả mãn *điều kiện hạng*: Khi chỉ lấy những ràng buộc có hiệu quả hay thoả mãn chặt, hãy lập ma trận các đạo hàm riêng $[\partial g^i/\partial u_j]_e$ (ở đây e "chỉ những ràng buộc có hiệu quả"), và các đạo hàm riêng lấy giá trị tại các giá trị tối ưu của các biến y và u. Điều kiện hạng là: hạng của ma trận này bằng số các ràng buộc có hiệu quả.

Bây giờ ta đưa thêm Hamilton vào hàm Lagrange:

$$\mathscr{L} = F(t,y,u_1,u_2) + \lambda(t)f(t,y,u_1,u_2) + \theta_1(t)[c_1 - g^1(t,y,u_1,u_2)] + \theta_2(t)[c_2 - g^2(t,y,u_1,u_2)] \qquad (3.209)$$

Để cho gọn ta viết

$$\mathscr{L} = F + \lambda f + \theta_1(c_1 - g^1) + \theta_2(c_2 - g^2) \qquad (3.209')$$

Điều kiện cấp một đối với cực đại $\mathscr{L}$, khi giả định các nghiệm là nghiệm trong, đòi hỏi

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j} = 0 \qquad (3.210)$$

cũng như

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_i} = c_i - g^i \geq 0 \qquad \theta_i \geq 0 \qquad \theta_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_i} = 0 \qquad (3.211)$$

$$(i = 1, 2 \text{ và } j = 1, 2) \quad \text{với mọi } t \in [0,T]$$

Điều kiện (3.211) khác với (3.205) bởi vì các ràng buộc trong bài toán

hiện tại là bất đẳng thức. Điều kiện $\partial\mathcal{L}/\partial\theta_i \geq 0$ chỉ phát biểu lại ràng buộc thứ i, và điều kiện được gọi là bù yếu $\theta_i(\partial\mathcal{L}/\partial\theta_i) = 0$ đảm bảo rằng các số hạng chứa θ_i trong (3.209) sẽ triệt tiêu trong nghiệm, nên giá trị của $\mathcal{L}$ sẽ trùng với giá trị của $H = F + \lambda f$ tại nghiệm.

Nhận xét rằng, không giống như trong quy hoạch phi tuyến, trong (3.210) ta có các điều kiện cấp một $\partial\mathcal{L}/\partial u_j = 0$, chứ không $\partial\mathcal{L}/\partial u_j \leq 0$. Đó là vì trong bài toán (3.208), các biến u_j không bị ràng buộc không âm. Nếu bài toán (3.208) chứa các điều kiện không âm

$$u_j(t) \geq 0$$

thì, theo các điều kiện Kuhn-Tucker, ta phải thay điều kiện $\partial\mathcal{L}/\partial u_j = 0$ trong (3.210) bằng

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} \leq 0 \qquad u_j \geq 0 \qquad u_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} = 0 \tag{3.212}$$

Cần chỉ ra rằng ký hiệu $\mathcal{L}$ trong (3.212) để ký hiệu cùng một Lagrange như định nghĩa trong (3.209), ta không đặt hàm Lagrange mới mặc dù xét thêm các ràng buộc $u_j(t) \geq 0$. Cách tiếp cận khác bằng cách thêm vào một nhân tử mới cho mỗi ràng buộc không âm $u_j(t) \geq 0$.

Các điều kiện nguyên lý cực đại khác bao gồm các phương trình chuyển động đối với y và λ. Các điều kiện này giống y như trong (3.206) và (3.207):

$$\dot{y} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} \quad (3.213) \qquad \text{và} \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \quad (3.214)$$

Tất nhiên, các điều kiện hoành cũng phải được thêm vào bất cứ khi nào thích hợp.

1.3. Bài toán đẳng chu

Khi có một ràng buộc tích phân, bài toán điều khiển được gọi là *bài toán đẳng chu*. Đáng chú ý đến hai đặc điểm của bài toán như vậy.

Thứ nhất:

Biến hiệp trạng thái gắn với ràng buộc tích phân, cũng như trong phép tính biến phân, là hằng số theo thời gian.

Thứ hai:

Mặc dù về bản chất, ràng buộc là một đẳng thức chặt, khía cạnh tích phân của nó tránh được sự cần thiết giới hạn số ràng buộc so với số biến điều khiển. Chúng ta sẽ minh hoạ phương pháp giải với bài toán chứa một biến trạng thái, một biến điều khiển, và một ràng buộc tích phân:

Cực đại $\int_0^T F(t,y,u)\,dt$ (3.215.1)

thoả mãn $\dot{y} = f(t,y,u)$ (3.215.2)

$\int_0^T G(t,y,u)dt = k$ (k cho trước) (3.215.3)

và $y(0) = y_0$, $y(T)$ tự do, (y_0, T cho trước) (3.215.4)

Cách tiếp cận được sử dụng ở đây là đưa một biến trạng thái mới Γ(t) vào bài toán để cho ràng buộc tích phân có thể được thay bằng một điều kiện biểu diễn theo Γ(t). Với mục đích đó, ta định nghĩa biến Γ(t) mà đạo hàm của nó được cho bởi

$$\dot{\Gamma} = -G(t,y,u) \quad \text{[phương trình chuyển động đối với Γ]} \qquad (3.216)$$

và các giá trị đầu và cuối của Γ(t) trong kỳ kế hoạch là

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(t,y,u)dt = 0 \qquad (3.217)$$

và

$$\Gamma(T) = -\int_0^T G(t,y,u)dt = -k \qquad \text{[theo (3.214)]} \qquad (3.218)$$

Từ (3.218), rõ ràng rằng ta có thể thay thế ràng buộc tích phân đã cho bằng một điều kiện cuối đối với biến Γ.

Đưa Γ vào bài toán như một biến trạng thái mới, ta có thể phát biểu lại (10.14) như sau:

Cực đại $\int_0^T F(t,y,u)\,dt$ (3.219.1)

thoả mãn $\dot{y} = f(t,y,u)$ (3.219.2)

$\dot{\Gamma} = -G(t,y,u)$ (3.219.3)

$y(0) = y_0$, $y(T)$ tự do, (y_0, T cho trước) (3.219.4)

và $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(T) = -k$, (k cho trước) (3.219.5)

Bài toán mới này là một bài toán không ràng buộc với hai biến trạng thái, y và Γ. Trong khi biến y có một đường cuối thẳng đứng, biến Γ chỉ có một điểm cuối cố định. Vì bài toán này bây giờ là một bài toán không ràng buộc, ta có thể làm việc với Hamilton mà không phải trước hết mở rộng nó thành một hàm Lagrange.

Thủ tục này có thể lặp lại cho các ràng buộc tích phân khác, với mỗi lần áp dụng mang lại một biến trạng thái mới cho bài toán. Đó là lý do không cần hạn chế số ràng buộc tích phân.

Ta định nghĩa Hamilton là

$$H = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u) - \mu G(t,y,u) \qquad (3.220)$$

Từ nguyên lý cực đại ta có các điều kiện sau đây:

$\max_u H$ đối với mọi $t \in [0,T]$

$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ (phương trình chuyển động đối với y),

$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}$ (phương trình chuyển động đối với λ) (3.221),

$\dot{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial \mu}$ (phương trình chuyển động đối với Γ),

$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma}$ (phương trình chuyển động đối với μ),

$\lambda(T) = 0$ (điều kiện hoành).

Điều phân biệt (3.221) với các điều kiện đối với bài toán không ràng buộc thông thường là sự có mặt cặp phương trình chuyển động đối với Γ và μ. Vì biến Γ là do ta tạo ra mà nhiệm vụ của nó chỉ là hướng dẫn ta thêm số hạng $-\mu G(t,y,u)$ vào Hamilton và đường đi thời gian của nó không đáng trực tiếp quan tâm, ta có thể bỏ phương trình chuyển động của nó khỏi (3.221) một cách an toàn mà không có hại gì. Một mặt khác, phương trình chuyển động của μ mang một thông tin có ý nghĩa. Vì biến Γ không xuất hiện trong Hamilton, suy ra rằng :

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = \text{hằng số} \qquad (3.222)$$

Biểu thức này củng cố điều khẳng định trước đây của ta rằng biến hiệp trạng thái gắn với ràng buộc tích phân là hằng số theo thời gian. Nhưng nếu chúng ta nhớ rằng nhân tử μ là hằng số, ta cũng có thể bỏ phương trình chuyển động của nó khỏi (3.221).

1.4. Ràng buộc bất đẳng thức tích phân

Cuối cùng, ta xét trường hợp trong đó ràng buộc tích phân tham gia vào bài toán như một bất đẳng thức, chẳng hạn

Cực đại $\int_0^T F(t,y,u)\,dt$ (3.223.1)

thoả mãn $\dot{y} = f(t,y,u)$ (3.223.2)

$\int_0^T G(t,y,u)dt \le k$ (k cho trước) (3.223.3)

và $y(0) = y_0$, $y(T)$ tự do, (y_0, T cho trước) (3.223.4)

Khi theo cách xử lý như bài toán đẳng chu, ta lại có thể loại ràng buộc bất đẳng thức tích phân bằng cách thực hiện một phép thế.

Hãy định nghĩa một biến trạng thái mới Γ giống như đã chỉ ra ở trên mà đạo hàm của nó đơn giản là

$\dot{\Gamma} = -G(t,y,u)$ [phương trình chuyển động đối với Γ] (3.224)

và các giá trị đầu và cuối của nó là

$$\Gamma(0) = -\int_0^0 G(t,y,u)dt = 0 \qquad (3.225)$$

$$\Gamma(T) = -\int_0^T G(t,y,u)dt \ge -k \qquad \text{[theo (3.223)]}$$

Sử dụng (3.224) và (3.225), ta có thể phát biểu lại bài toán (3.223) là

Cực đại $\int_0^T F(t,y,u)\,dt$ (3.226.1)

thoả mãn $\dot{y} = f(t,y,u)$ (3.226.2)

$\dot{\Gamma} = -G(t,y,u)$ (3.226.3)

$y(0) = y_0$ $y(T)$ tự do (y_0, T cho trước) (3.226.4)

và $\Gamma(0) = 0$ $\Gamma(T) \ge -k$ (k cho trước) (3.226.5)

Giống như bài toán trong (3.209), đây là một bài toán không ràng buộc

với hai biến trạng thái. Nhưng, không giống (3.219), biến mới Γ trong (3.226) có một đường cuối thẳng đứng cụt.

Hamilton của bài toán (3.226) đơn giản là

$$H = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u) - \mu G(t,y,u) \tag{3.227}$$

Nếu các tiêu chuẩn đối với ràng buộc thoả mãn, thì nguyên lý cực đại đòi hỏi rằng:

$$\max_u H \quad \text{đối với mọi } t \in [0,T] \tag{3.228.1}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{[phương trình chuyển động đối với y]} \tag{3.228.2}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{[phương trình chuyển động đối với } \lambda\text{]} \tag{3.228.3}$$

$$\dot{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \quad \text{[phương trình chuyển động đối với } \Gamma\text{]} \tag{3.228.4}$$

$$\dot{\mu} = \frac{\partial H}{\partial \Gamma} \quad \text{[phương trình chuyển động đối với } \mu\text{]} \tag{3.228.5}$$

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{[điều kiện hoành đối với y]} \tag{3.228.6}$$

$$\mu(T) \geq 0 \qquad \Gamma(T) + k \geq 0 \qquad \mu(T)[\Gamma(T) + k] = 0 \tag{3.228.7}$$

[điều kiện hoành đối với Γ]

Lại một lần nữa, lưu ý rằng vì Hamilton độc lập với Γ, ta có

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \text{hằng số}$$

Do đó, rõ ràng rằng nhân tử gắn với ràng buộc tích phân bất kỳ là hằng số theo thời gian. Hơn nữa, trong bài toán hiện tại, ta có thể suy diễn từ điều kiện hoành rằng giá trị hằng số của μ là không âm. Nhưng, như trong (3.221), thực tế ta có thể bỏ qua các phương trình chuyển động đối với Γ và μ trong (3.228), với điều kiện là ta nhớ rằng μ là một hằng số không âm. Trái lại, điều kiện hoành đối với Γ - liên quan với tính bù yếu – phải giữ lại để phản ánh bản chất bất đẳng thức của ràng buộc. Tóm lại, các điều kiện trong (3.228) có thể phát biểu lại không đề cập đến Γ như sau:

$$\max_u H \quad \text{đối với mọi } t \in [0,T] \tag{3.228'.1}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad (3.228'.2)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (3.228'.3)$$

$$\lambda(T) = 0 \qquad (3.228'.4)$$

$$\mu = \text{hằng số} \ge 0 \qquad k - \int_0^T G(t,y,u)dt \ge 0 \qquad (3.228'.5)$$

và $$\mu\left[k - \int_0^T G(t,y,u)dt\right] = 0 \qquad \text{[theo (3.225)]} \quad (3.228'.6)$$

Trong thảo luận trên, bốn loại ràng buộc đã được xử lý riêng rẽ. Nhưng trong trường hợp chúng xuất hiện đồng thời trong một bài toán, chúng ta vẫn có thể giải quyết bằng cách kết hợp các thủ tục thích hợp cho mỗi loại ràng buộc. Đối với mọi ràng buộc dạng $g(t,y,u) = 0$ hoặc $g(t,y,u) \le c$, ta thêm một số hạng nhân tử θ mới vào Hamilton, bằng cách đó mở rộng nó thành một Lagrange. Và đối với mọi ràng buộc tích phân, dạng đẳng thức hay bất đẳng thức, ta đưa vào một biến trạng thái mới, mà biến hiệp trạng thái của nó là μ - một hằng số - được phản ánh trong một số hạng $-\mu\, G(t,y,u)$ trong Hamilton. Hơn nữa, nếu ràng buộc là một bất đẳng thức, sẽ có một điều kiện bù yếu đối với nhân tử θ hoặc μ.

Thí dụ 1. Mô hình chu trình kinh doanh do ảnh hưởng chính trị (3.61):

Cực đại $$\int_0^T v(U,p)e^{rt}\, dt \qquad (3.229.1)$$

thoả mãn $$p = \phi(U) + a\pi \qquad (3.229.2)$$

$$\dot{\pi} = b(p - \pi) \qquad (3.229.3)$$

và $\pi(0) = \pi_0$ $\quad \pi(T)$ tự do $\quad$ (π_0, T cho trước) (3.229.4)

chứa một ràng buộc đẳng thức $p = \phi(U) + a\pi$. Nhưng ta đã giải bài toán như một bài toán không ràng buộc bằng cách thế để loại phương trình ràng buộc ra. Bây giờ ta chỉ ra cách giải quyết nó trực tiếp như một bài toán có ràng buộc.

Trong bài toán này, π là biến trạng thái; nó có một phương trình chuyển động. Trước đây, vì p được thế và đưa ra ngoài, U là biến điều khiển duy nhất. Tuy nhiên, bây giờ p vẫn còn trong mô hình, nên nó phải được

xem như một biến điều khiển khác. Như vậy, phương trình ràng buộc

$$p - \phi(U) - a\,\pi = 0$$

phù hợp với dạng thức tổng quát $g(t,y,u_1,u_2) = c$ trong (3.201), mặc dù trong đó không có đối số t dưới dạng hiển.

Theo (3.203), ta có thể viết hàm Lagrange

$$\mathcal{L} = v(U,p)e^{rt} + \lambda b(p-\pi) + \theta[\phi(U) + a\pi - p] \tag{3.230}$$

Nếu sử dụng các hàm cụ thể sau đây:

$$v(U,p) = -U^2 - hp \qquad (h > 0) \qquad \text{[từ (3.62)]}$$

$$\phi(U) = j - kU \quad (j, k > 0) \qquad \text{[từ (3.63)]}$$

thì hàm Lagrange trở thành

$$\mathcal{L} = (-U^2 - hp)e^{rt} + \lambda b(p-\pi) + \theta[j - kU + a\pi - p] \tag{3.230'}$$

Theo đó, nguyên lý cực đại dẫn đến các điều kiện

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = -2Ue^{rt} - \theta k = 0 \quad \text{[theo (3.204)]} \tag{3.231}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = -he^{rt} + \lambda b - \theta = 0 \quad \text{[theo (3.204)]} \tag{3.232}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = j - kU + a\pi - p = 0 \quad \text{[theo (3.205)]} \tag{3.233}$$

$$\dot{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = b(p-\pi) \qquad \text{[theo (3.206)]} \tag{3.234}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} = \lambda b - \theta a \qquad \text{[theo (3.207)]} \tag{3.235}$$

và thêm một điều kiện hoành. Tất nhiên các điều kiện này tương đương với các điều kiện rút ra trước đây bằng một cách tiếp cận khác.

Để kiểm tra lại sự tương đương của hai cách tiếp cận, ta hãy thể hiện lại ở đây để so sánh các điều kiện

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - \lambda bk = 0 \quad \text{[cực đại Hamilton]} \tag{3.236}$$

$$\dot{\pi} = b[j - kU - (1-a)\pi] \quad \text{[phương trình chuyển động trạng thái]} \tag{3.237}$$

$\dot{\lambda} = hae^{rt} + \lambda b(1-a)$ [phương trình chuyển động hiệp trạng thái] (3.238)

Đầu tiên ta sẽ chỉ ra rằng (3.231) và (3.232) – các điều kiện đối với hai biến điều khiển U và p – cùng hợp lại tương đương với (3.236). Giải (3.232) đối với θ, ta tìm được

$$0 = -he^{rt} + \lambda b \tag{3.239}$$

Thế vào (3.231) cho ta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = -2Ue^{rt} + hke^{rt} - \lambda bk = 0 \tag{3.240}$$

trùng với (3.236). Tiếp theo, giải (3.233) đối với p, ta được

$$p = j - kU + a\pi \tag{3.241}$$

Đây tất nhiên chỉ phát biểu lại ràng buộc. Biểu thức này giúp ta viết lại (3.234) là

$$\dot{\pi} = b(j - kU + a\pi - \pi) = b[j - kU - (1-a)\pi] \tag{3.242}$$

Nó giống y như (3.237). Cuối cùng, sử dụng biểu thức θ trong (3.239), có thể viết lại (3.235) là

$$\dot{\lambda} = \lambda b + hae^{rt} - \lambda ba = \lambda b(1-a) + hae^{rt} \tag{3.243}$$

trùng với (3.238). Vì vậy, hai cách tiếp cận là tương đương.

1.5. Hàm Hamilton và Lagrange theo giá trị hiện thời (đương thời)

Khi bài toán có ràng buộc có chứa thừa số chiết khấu, có thể sử dụng Hamilton theo giá trị hiện thời H_C thay cho H. Trong trường hợp đó, Lagrange $\mathcal{L}$ phải được thay bằng Lagrange theo giá trị hiện thời $\mathcal{L}_C$.

Hãy xét bài toán có ràng buộc bất đẳng thức

Cực đại $$\int_0^T \Phi(t,y,u)e^{-\rho t}\,dt \tag{3.244}$$

thoả mãn $$\dot{y} = f(t,y,u) \tag{3.245}$$

$$g(t,y,u) \le c \tag{3.246}$$

và các điều kiện biên (3.247)

Hamilton và Lagrange bình thường là

$$H = \Phi(t,y,u)e^{-\rho t} + \lambda f(t,y,u) \tag{3.248}$$

$$\mathscr{L} = \Phi(t,y,u)e^{-\rho t} + \lambda f(t,y,u) + \theta[c - g(t,y,u)] \tag{3.249}$$

Và nguyên lý cực đại đòi hỏi (giả thiết có nghiệm trong):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0,T] \tag{3.250}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = c - g(t,y,u) \geq 0 \qquad \theta \geq 0 \qquad \theta\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0 \tag{3.251}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} \tag{3.252}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \tag{3.253}$$

và một điều kiện hoành thích hợp.

Bằng cách đưa vào các nhân tử mới

$$m = \lambda e^{\rho t} \qquad (\text{kéo theo } \lambda = me^{-\rho t}) \tag{3.254}$$

$$n = \theta e^{\rho t} \qquad (\text{kéo theo } \theta = ne^{-\rho t})$$

ta có thể đưa vào các dạng tính theo giá trị hiện thời của H và $\mathscr{L}$ như sau:

$$H_c = He^{\rho t} = \Phi(t,y,u) + mf(t,y,u) \tag{3.255}$$

$$\mathscr{L}_c = \mathscr{L}e^{\rho t} = \Phi(t,y,u) + mf(t,y,u) + n[c - g(t,y,u)] \tag{3.256}$$

Có thể dễ dàng kiểm tra lại rằng

$$\frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial u} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u}e^{\rho t} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial n} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} \qquad \text{và} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial m} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}$$

Do đó, các điều kiện (3.250), (3.251) và (3.252) có thể được biểu diễn một cách tương đương qua $\mathscr{L}_C$ và các nhân tử mới m và n như sau:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial u} = 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0,T] \tag{3.257}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial n} \geq 0, \qquad n \geq 0, \qquad n\frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial n} = 0 \tag{3.258}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial m} \tag{3.259}$$

Sự cải biên chính duy nhất đòi hỏi khi ta sử dụng $\mathcal{L}_C$ là ở phương trình chuyển động đối với biến hiệp trạng thái, (3.253). Phát biểu mới tương dương, sử dụng biến mới m, là

$$\dot{m} = -\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial y} + \rho m \tag{3.260}$$

Để kiểm tra điều này, đầu tiên lấy đạo hàm biểu thức λ trong (3.254) theo t, để thu được

$$\dot{\lambda} = \dot{m}e^{-\rho t} - \rho m e^{-\rho t}$$

Rồi lấy đạo hàm $\mathcal{L}$ theo y để thu được

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\Phi_y e^{-\rho t} - \lambda f_y + \theta g_y$$

Đặt hai biểu thức này bằng nhau theo (3.253), và nhân với $e^{\rho t}$, ta tìm được

$$\dot{m} - \rho m = -\Phi_y - m f_y + n g_y$$

Vì biểu thức ở vế phải bằng $-\partial \mathcal{L}_C/\partial y$ [từ (3.256)], ta suy ra ngay kết quả trong (3.260).

Đối với các bài toán chỉ có các ràng buộc tích phân, không cần thiết hàm Lagrange nào, hay nói một cách khác, Lagrange rút gọn về Hamilton. Đó là vì ta đã đưa mỗi ràng buộc tích phân vào bài toán qua một biến trạng thái mới – như là Γ trong (3.219) và (3.226). Theo đó, các điều kiện nguyên lý cực đại có thể được phát biểu lại theo Hamilton. Nếu ta quyết định sử dụng H_C thay cho H, thì thủ tục đã vạch ra có thể áp dụng một cách dễ dàng. Lại một lần nữa, cải biên chủ yếu là ở phương trình chuyển động hiệp trạng thái, cụ thể là thay điều kiện $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial y$ bằng điều kiện $\dot{m} = -\partial H_c/\partial y + \rho m$. Với một biến trạng thái mới đưa vào Γ, bài toán sẽ có một biến hiệp trạng thái mới μ. Vì phương trình chuyển động của nó là $\dot{\mu} = -\partial H/\partial \Gamma = 0$, nên μ là một hằng số.

1.6. Các điều kiện đủ

Các điều kiện đủ Mangasarian và Arrow, đã thảo luận trước đây trong phạm vi các bài toán không ràng buộc, cũng đúng đối với các bài toán có

ràng buộc khi thời gian cuối T cố định, bao gồm các trường hợp điểm cuối cố định, đường thẳng cuối đứng hoặc một đường cuối thẳng đứng cụt.

Ta hãy sử dụng ký hiệu u để biểu thị véc tơ các biến điều khiển. Thí dụ, đối với bài toán (3.201) và (3.208) ta có $u = (u_1,u_2)$. Như trước đây, cho H^0 ký hiệu Hamilton cực đại hoá – Hamilton lấy giá trị theo đường đi $u^*(t)$. Nhưng trong khuôn khổ hiện tại, Hamilton được hiểu là được cực đại hoá thoả mãn tất cả các ràng buộc dạng $g(t,y,u) = c$ hoặc dạng $g(t,y,u) \le c$ có trong bài toán. Ngoài ra, vì mọi ràng buộc tích phân trong bài toán được phản ánh trong H qua biến hiệp trạng thái mới μ, nó cũng phải được phản ảnh tương tự trong H^0.

Để đơn giản, ta có gộp các điều kiện đủ Mangasarian và Arrow vào một phát biểu: Các điều kiện của nguyên lý cực đại là đủ đối với cực đại hoá toàn cục của phiếm hàm mục tiêu nếu: Hoặc $\mathcal{L}$ là lõm theo (y,u) đối với mọi $t \in [0,T]$; Hoặc H^0 là lõm theo y đối với mọi $t \in [0,t]$, đối với λ đã cho. (3.261)

Các điều kiện này cũng có thể áp dụng được cho các bài toán tầm vô hạn, nhưng trong trường hợp tầm vô hạn, (3.261) cần được bổ sung bởi một điều kiện hoành

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)[y(t) - y^*(t)] \geq 0 \qquad \text{[so sánh (3.174)]} \qquad (3.262)$$

Có thể thêm vào đây một vài nhận xét về (3.261). Thứ nhất, như đã chỉ ra trước đây, tính lõm của $\mathcal{L}$ theo (y,u) nghĩa là lõm theo biến y và u đồng thời, không phải riêng rẽ theo y và theo u. Thứ hai, vì H và $\mathcal{L}$ được tạo thành từ các hàm F, f, g và G như sau:

$$H = F + \lambda f - \mu G \qquad \text{và} \qquad \mathcal{L} = H + \theta[c - g]$$

nên rõ ràng rằng (3.261) sẽ thoả mãn nếu đồng thời có

F là lõm theo (y,u)

λf là lõm theo (y,u)

μG là lồi theo (y,u)

và θg là lồi theo (y,u) với mọi $t \in [0,T]$

Tuy nhiên, trong trường hợp một ràng buộc bất đẳng thức tích phân, trong đó μ là một hằng số không âm [theo (3.228)], tính lồi của μG được đảm bảo bởi tính lồi của chính G. Tương tự, trong trường hợp một ràng buộc

bất đẳng thức, trong đó $\theta \geq 0$ [theo (3.211)], tính lồi của θg được đảm bảo bởi tính lồi của chính g. Cuối cùng, nếu sử dụng Hamilton và Lagrange theo giá trị hiện thời, (3.261) có thể dễ dàng phỏng đoán bằng việc thay $\mathcal{L}$ bởi $\mathcal{L}_C$ và H^0 bởi $H^0{}_C$.

II. ỨNG DỤNG KINH TẾ - ĐỘNG THÁI CỦA CÁC CÔNG TY CỰC ĐẠI HOÁ DOANH THU

Trong mô hình Evans về công ty độc quyền động, mục tiêu được nêu lên là cực đại tổng lợi nhuận. Điều này không có gì lạ, bởi vì đó cũng chính là mục tiêu chung của hầu hết các hoạt động kinh tế được các nhà kinh tế chấp thuận từ lâu. Tuy nhiên, Baumol đưa ra mô hình trong đó thay vì cực đại lợi nhuận đã xét hàm mục tiêu là doanh thu các công ty hiện đại cố gắng cực đại hoá doanh số bán hàng đồng thời thoả mãn đòi hỏi thống nhất về tỷ lệ trả lãi. Cơ sở của quan điểm đó là ngày nay có có sự phân tách giữa quyền sở hữu và quyền quản lý trong hình thức tổ chức điển hình của công ty, trong đó những người quản lý, vì lợi ích của mình, họ nghiêng về phía cực đại lượng hàng bán ra, mặc dù mục tiêu của các cổ đông là cực đại lợi nhuận. Tuy nhiên, để xoa dịu các cổ đông, những người quản lý phải cố gắng đạt ít nhất một tỷ lệ trả lãi chấp nhận được.

Vì mô hình Baumol là tĩnh, người ta nghi ngờ tính vững chắc của nó trong khuôn khổ động. Đặc biệt, vì lợi nhuận là phương tiện của tăng trưởng, và tăng trưởng làm cho có thể đạt doanh số bán lớn hơn, nên dường như trong khuôn khổ động, cực đại hoá lợi nhuận có thể là tiền đề cho cực đại hoá doanh số bán. Để xét xem tiên đề Baumol có còn đúng trong một thế giới động hay không, Hayne Leland đã đặt ra mô hình điều khiển tối ưu dưới đây.

2.1. Mô hình

Hãy xét một công ty sản xuất một hàng hoá với hàm sản xuất tân cổ điển Q = Q(K,L), hàm này là thuần nhất tuyến tính và tựa lõm chặt, tức là giả thiết:

$$\begin{aligned} &\frac{Q}{L} = \phi(k) \qquad \left(k \equiv \frac{K}{L}\right) \qquad \phi(0) = 0 \\ &Q_K = \phi'(k) \qquad Q_K > 0 \qquad Q_{KK} < 0 \\ &Q_L = \phi(k) - k\phi'(k) \qquad Q_L > 0 \qquad Q_{LL} < 0 \end{aligned} \tag{3.263}$$

Tất cả các giá cả - kể cả tiền công W và giá hàng hoá vốn - được giả thiết là hằng số, và giá sản phẩm của công ty được chuẩn hoá về 1. Như vậy, doanh thu và (tổng) lợi nhuận của công ty lần lượt là

$$R = Q(K,L)\ .\ 1\ = Q(K,L)$$

$$\pi = R - WL = Q(K,L) - WL$$

Để làm vừa lòng cổ đông, những người quản lý phải xác định một tỷ lệ trả lãi chấp nhận được ít nhất r_0. Điều đó có nghĩa là công việc quản lý bị ràng buộc bởi bất đẳng thức

$$\frac{\pi}{K} \geq r_0 \quad \text{hay} \quad Q(K,L) - WL - r_0K \geq 0 \qquad (3.264).$$

Ta còn phải chỉ ra quyết định về đầu tư và tích luỹ vốn. Để đơn giản, ta giả thiết rằng, công ty luôn luôn giành một tỷ lệ cố định lợi nhuận để đầu tư trở lại vào vốn. Định nghĩa α là tỷ lệ lợi nhuận đầu tư trở lại đó. Ta có

$$\dot{K}(= I) = \alpha\pi = \alpha[Q(K,L) - WL] \qquad (3.265)$$

với vốn ban đầu $K(0) = K_0$.

Như vậy, ta có thể phát biểu bài toán của công ty cực đại doanh thu như một bài toán với ràng buộc bất đẳng thức là:

$$\text{Cực đại} \qquad \int_0^T Q(K,L)e^{-\rho t}\,dt \qquad (3.266.1)$$

$$\text{thoả mãn} \qquad \dot{K} = \alpha[Q(K,L) - WL] \qquad (3.266.2)$$

$$WL + r_0K - Q(K,L) \leq 0 \qquad (3.266.3)$$

$$\text{và } K(0) = K_0 \quad K(T) \text{ tự do} \qquad (K_0, T \text{ cho trước}) \qquad (3.266.4)$$

Mô hình này chỉ có hai biến, K và L. Sự có mặt của phương trình chuyển động của K nói lên rằng K đóng vai trò biến trạng thái, còn L như biến điều khiển duy nhất.

Để ý rằng hàm ràng buộc $WL + r_0K - Q(K,L)$ là lồi theo biến điều khiển L, và tập hợp các ràng buộc của các điểm để bất đẳng thức thoả mãn ngặt (có tỷ lệ trả lãi lớn hơn mức r_0). Như vậy, ràng buộc chất lượng thoả mãn.

2.2. Nguyên lý cực đại

Hamilton theo giá trị hiện thời của bài toán này là

$$H_C = Q(K,L) + m\,\alpha\,[Q(K,L) - WL]$$

Bằng việc bổ sung thêm cho Hamilton với thông tin trong ràng buộc bất đẳng thức, ta có thể viết Lagrange theo giá trị hiện thời là

$$\mathcal{L}_C = Q(K,L) + m\,\alpha\,[Q(K,L) - WL] + n\,[Q(K,L) - WL - r_0K]$$

Từ (3.257) và (3.258), ta có các điều kiện cấp một sau đây đối với cực đại hoá $\mathcal{L}_C$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial L} = (1 + m\alpha + n)Q_L - (m\alpha + n)W = 0\text{, với mọi } t \in [0,T]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial n} = Q(K,L) - WL - r_0K \geq 0 \qquad n \geq 0$$

và $n[Q(K,L)\ WL - r_0K] = 0$

Để xác định động thái của hệ thống, ta dựa vào hai phương trình chuyển động

$$\dot{K} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial m} = \alpha[Q(K,L) - WL]$$

và

$$\dot{m} = -\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial K} + \rho m = -(1 + m\alpha + n)Q_K + nr_0 + \rho m \text{ [theo (3.260)]}$$

Cuối cùng, phải quy định điều kiện hoành

$$m(T) = 0$$

vì K(T) tự do.

III. CÁC RÀNG BUỘC KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI

3.1. Ràng buộc

Nhóm ràng buộc thứ hai gồm các ràng buộc mà trong đó không có biến điều khiển nào xuất hiện. Các ràng buộc như vậy đặt những hạn chế đối với không gian trạng thái, và phân ranh giới miền di chuyển chấp nhận được đối với biến y. Một thí dụ đơn giản của loại ràng buộc này thích hợp cho nhiều bài toán kinh tế là những ràng buộc không âm

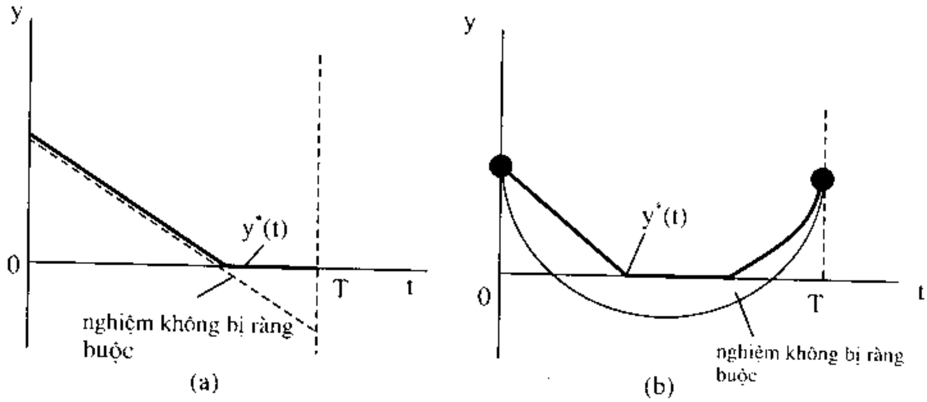
$$y(t) \geq 0 \text{ hay } \quad -y(t) \leq 0 \qquad \text{với mọi } t \in [0,T]$$

Nhưng tổng quát hơn, ràng buộc này có thể có dạng

$$h(t,y) \le c \qquad \text{với mọi } t \in [0,T]$$

Trong mỗi trường hợp, biến điều khiển u không có mặt trong các hàm ràng buộc.

Do ngẫu nhiên, có thể xảy ra là khi ta bỏ qua ràng buộc không gian trạng thái và giải bài toán đã cho như một bài toán không ràng buộc, đường đi tối ưu y*(t) nằm hoàn toàn trong miền cho phép. Trong trường hợp đó, ràng buộc là tầm thường. Tuy nhiên, với một ràng buộc có ý nghĩa, ta kỳ vọng đường đi tối ưu không ràng buộc sẽ vi phạm ràng buộc, ví như đường đứt nét trong Hình 3.15a vi phạm điều kiện không âm.



Hình 3.13

Nghiệm tối ưu đúng trong Thí dụ này, được minh hoạ bằng đường liền nét, có thể chứa một hoặc nhiều đoạn nằm trên chính cận ràng buộc. Nghĩa là, có thể có một hoặc nhiều "khoảng ràng buộc" (hay "khoảng hạn chế") trong phạm vi [0,T] khi ràng buộc thực sự trói buộc (hiệu quả), với h(t,y) = c. Đôi khi đường đi tối ưu đúng có thể có một vài đoạn chung với đường đi nghiệm không ràng buộc; nhưng hai đường đi cũng có thể hoàn toàn khác nhau như minh hoạ trong Hình 3.13b.

Mặc dù nói chung ta không thể kỳ vọng nghiệm không ràng buộc là thích hợp, nhưng việc cứ thử nó không phải là ý tưởng tồi. Nếu nghiệm đó thoả mãn ràng buộc thì bài toán được giải xong. Ngay cả nếu không, sẽ thường nổi lên những manh mối hữu ích về bản chất của nghiệm đúng.

3.2. Giải quyết các ràng buộc không gian trạng thái

Giả sử bài toán là

Cực đại $$\int_0^T F(t,y,u)\,dt \qquad (3.267.1)$$

thoả mãn $$\dot{y} = f(t,y,u) \qquad (3.267.2)$$

$$h(t,y) \le c \qquad (3.267.3)$$

và các điều kiện biên (3.267.4)

Ta có thể kỳ vọng phương pháp đã trình bày áp dụng cho bài toán này. Nếu vậy, ta có hàm Lagrange

$$\mathcal{L} = F(t,y,u) + \lambda\, f(t,y,u) + \theta\,[c - h(t,y)] \qquad (3.268)$$

với các điều kiện nguyên lý cực đại (giả định nghiệm trong)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = F_u + \lambda f_u = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = c - h(t,y) \ge 0 \qquad \theta \ge 0 \qquad \theta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(t,y,u) \qquad (3.269)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -F_y - \lambda f_y + \theta h_y$$

cộng thêm một điều kiện hoành nếu cần thiết

Tại sao các điều kiện này không thể được sử dụng như ta đã làm trước đây?

Trước hết là, trong bài toán có ràng buộc đã thảo luận trước đây, lời giải dựa vào tính liên tục của các biến y và λ, chỉ các biến điều khiển là cho phép có bước nhảy (thí dụ, bang-bang). Nhưng ở đây với các ràng buộc trạng thái thuần tuý, biến hiệp trạng thái λ cũng có thể trải qua các bước nhảy ở các điểm mối nối, nơi mà ràng buộc $h(t,y) \le c$ chuyển từ trạng thái lỏng sang chặt hoặc ngược lại. Cụ thể, nếu τ là một điểm mối nối giữa một khoảng không ràng buộc và một khoảng ràng buộc, và nếu ta ký hiệu lần lượt $\lambda^-(\tau)$ và $\lambda^+(\tau)$ là giá trị của λ ngay trước và ngay sau bước nhảy, thì điều kiện nhảy là

$$\lambda^+(\tau) = \lambda^-(\tau) + bh_y \qquad (b \geq 0) \tag{3.270}$$

Tuy nhiên, vì giá trị của b là không xác định, điều kiện này chỉ có thể giúp khẳng định hướng nhảy. Lưu ý rằng có thể b bằng 0, có nghĩa là λ có thể không gián đoạn tại một điểm mối nối. Tình huống này có thể xảy ra khi hàm ràng buộc h(t,y) có một điểm nhọn tại τ, nghĩa là khi $\dot{h}$ không liên tục tại τ.

Trong mọi trường hợp, thủ tục giải đòi hỏi một sự cải biên. Bây giờ ta cần chú ý các điểm mối nối, và hãy đảm bảo không bước vào phần cấm của không gian trạng thái.

3.3. Một cách tiếp cận khác

Trong khi có thể tiến hành trên cơ sở các điều kiện trong (3.269), thực hiện một cách tiếp cận khác trong đó thay đổi trong trạng thái của ràng buộc h(t,y) ≤ c tại các điểm nối được tính đến một cách hiển hơn thì dễ dàng hơn. Xem xét chủ yếu của cách tiếp cận này là: vì h(t,y) không được phép lớn hơn c, nên bất cứ khi nào h(t,y) = c (ràng buộc trở nên thực sự trói buộc) ta phải cấm h(t,y) tăng. Điều này chỉ có thể được thực hiện bằng cách quy định điều kiện

$$\frac{dh}{dt} \leq 0 \text{ bất cứ khi nào } h(t,y) = c$$

Lưu ý rằng đạo hàm dh/dt là một hàm của t và y bởi vì

$$\frac{d}{dt}h(t,y) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h_t + h_y f(t,y) \equiv \dot{h}(t,y)$$

Do đó, ràng buộc mới dh/dt ≤ 0 bất cứ khi nào h(t,y) = c, hay cụ thể hơn,

$$\dot{h}(t,y) \equiv h_t + h_y f(t,y) \leq 0 \quad \text{bất kỳ khi nào } h(t,y) = c \tag{3.271}$$

thuộc hoàn toàn vào nhóm g(t,y,u) ≤ c đã thảo luận. Điểm khác duy nhất là (3.271) không có giá trị đối với mọi t ∈ [0,T], mà cần có hiệu lực chỉ khi h(t,y) = c.

Với ràng buộc mới, phát biểu bài toán bây giờ có dạng

$$\text{Cực đại} \qquad \int_0^T F(t,y,u)\,dt \tag{3.272.1}$$

thoả mãn $\dot{y} = f(t, y, u)$ (3.272.2)

$\dot{h}(t,y,u) = h_t + h_y f(t,y,u) \le 0$ (3.272.3)

bất cứ khi nào h(t,y) = c (3.272.4)

và các điều kiện biên (3.272.5)

Để có thể so sánh các điều kiện nguyên lý cực đại, ta sẽ dùng các ký hiệu nhân tử phân biệt Λ và Θ ở đây. Giả sử Lagrange được viết là

$$\mathcal{L}' = F(t, y, u) + \Lambda f_u - \Theta \dot{h} \quad (3.273)$$

Khi đó, như một phần của các điều kiện nguyên lý cực đại, ta đòi hỏi rằng (giả định rằng tiêu chuẩn ràng buộc thoả mãn)

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u} = F_u + \Lambda f_u - \Theta h_y f_u = 0$$

và

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Theta} = -\dot{h} = -h_t - h_y f(t,y,u) \ge 0 \qquad \Theta \ge 0 \qquad \Theta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Theta} = 0$$

Trong khi tập hợp các điều kiện đối với Θ có vẻ phục vụ cho mục đích phát biểu lại ràng buộc, nó không làm rõ được rằng tập hợp này áp dụng chỉ khi h(t,y) = c. Để khắc phục, ta thêm điều kiện bù yếu

$$h(t,y) \le c \qquad \Theta[c - h(t,y)] = 0$$

Khi đó, h(t,y) < c (ràng buộc lỏng) có nghĩa là Θ = 0, điều này làm cho số hạng cuối cùng trong $\mathcal{L}'$ không còn, và do đó đưa các điều kiện đối với $\partial\mathcal{L}'/\partial\Theta$ về 0. Ngược lại, khi h(t,y) = 0 (ràng buộc chặt), ý muốn nói điều kiện bù yếu kéo theo Θ > 0. Như vậy đây là một dạng mạnh hơn của điều kiện bù yếu. [Trong diễn giải bình thường của điều kiện bù yếu, h(t,y) = 0 tương hợp với Θ = 0 cũng như Θ > 0.]

Thêm vào đó, nguyên lý cực đại đối với cách tiếp cận hiện tại cũng đặt một hạn chế đối với cách thức mà Θ thay đổi theo thời gian: Tại các điểm mà Θ khả vi, $\dot{\Theta}$ phải không âm bất cứ khi nào h(t,y) = c. Hạn chế này sẽ được giải thích sau.

Gộp tất cả các kết quả lại, ta có tập hợp các điều kiện sau đây (khi giả định nghiệm trong):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = F_u + \Lambda f_u - \Theta h_y f_u = 0 \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = -\dot{h} = -[h_t + h_y f(t,y,u)] \geq 0 \qquad \Theta \geq 0 \qquad \Theta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = 0 \\
&h(t,y) \leq c \qquad \Theta[c - h(t,y)] = 0 \\
&\dot{\Theta} \leq 0 \qquad [= 0 \text{ khi } h(t,y) < c] \\
&\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = f(t,y,u) \\
&\dot{\Lambda} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -F_y - \Lambda f_y + \Theta[h_{yt} + h_y f_y + h_{yy} f]
\end{aligned} \tag{3.274}$$

và một điều kiện hoành nếu cần thiết

Lưu ý rằng, sau khi rút ra biểu thức $\dot{h}$ từ hàm ràng buộc h(t,y), ta có thể áp dụng trực tiếp các điều kiện trong (3.274) mà không cần chuyển bài toán (3.267) về dạng (3.272).

Ở đây, như trong (3.269), ta giả định rằng cực đại hoá Lagrange theo u mang lại nghiệm trong. Nếu bản thân biến điều khiển thoả mãn ràng buộc không âm $u(t) \geq 0$, thì điều kiện $\partial\mathcal{L}/\partial u = 0$ phải được thay bằng điều kiện Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \qquad u \geq 0 \qquad u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

Các điều kiện này cho phép khả năng có nghiệm biên. Tất nhiên, các nghiệm biên cũng có thể xảy ra nếu có một miền điều khiển đóng đối với u.

Nét phân biệt của cách tiếp cận này là hàm f(t,y,u) tham gia vào Lagrange $\mathcal{L}$ hai lần, với hai nhân tử khác nhau, Λ (một biến hiệp trạng thái) và Θ (một nhân tử Lagrange đối với một bài toán có ràng buộc). Theo đó, đạo hàm riêng f_u cũng xuất hiện hai lần trong điều kiện $\partial\mathcal{L}/\partial u = 0$ – dòng đầu tiên trong (3.274) – một lần với Λ và một lần với Θ. Trái lại, điều kiện $\partial\mathcal{L}/\partial u = 0$ trong (3.269) không chứa nhân tử θ. Như vậy, với cách tiếp cận mới, dáng điệu của Θ và những ảnh hưởng của nó đối với hệ thống được thể hiện rõ ràng hơn. Khi ràng buộc không gian trạng thái không chặt, với $h(t,y) < c$, Θ nhận giá trị 0, và (3.274) rút gọn thành các điều kiện nguyên lý cực đại thông thường. Nhưng khi ràng buộc thay đổi trạng thái của nó từ không chặt thành chặt, các điều kiện trong (3.274) sẽ trở nên có hiệu lực đầy đủ, xác định nhân tử Θ ảnh hưởng như thế nào lên hệ thống, và bản thân Θ phải thay đổi qua thời gian như thế nào.

Trong khi cách tiếp cận được tổng kết trong (3.274), với thông tin rõ ràng hơn về các điểm mối nối, dễ sử dụng hơn so với cách tiếp cận trong (3.269), hai cách tiếp cận thực tế là tương đương.

Thí dụ

Hãy xét bài toán

Cực đại $\int_0^2 (4-t)u\,dt$ (3.275.1)

thoả mãn $\dot{y} = u$ (3.275.2)

$y - t \leq 1$ (3.275.3)

$y(0) = 0 \qquad y(3) = 3$ (3.275.4)

và $u \in [0,2]$ (3.275.5)

Bài toán này chứa một ràng buộc không gian trạng thái, y - t ≤ 1. Nếu ta không xét đến ràng buộc này và lập Hamilton

$$H = (4 - t)\,u + \lambda\,u$$

Thì ta thấy rằng H là tuyến tính theo u với độ dốc

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 4 - t + \lambda$$

Khi cho miền điều khiển đóng [0,2], ta có thể kỳ vọng nảy sinh một nghiệm biên. Cụ thể, từ hàm lấy tích phân ta thu được, để cực đại phiếm hàm mục tiêu, ta phải đặt u cao nhất có thể được. Như vậy, một sự phỏng đoán có lý về nghiệm không ràng buộc là u(t) = 2. Điều này kéo theo $\dot{y} = u = 2$ và y(t) = 2t + k. Sau khi sử dụng điều kiện đầu y(0) = 0, ta thu được đường đi tuyến tính đơn giản

$$y(t) = 2t$$

Đường đi này là đường đi cho phép tăng nhanh nhất trong y, bởi vì nó tương ứng với giá trị cao nhất của u, và vì vậy giá trị cao nhất của $\dot{y}$. Tuy nhiên, như Hình 3.14 chỉ ra, đường đi này khi tăng ổn định từ điểm gốc toạ độ, có thể ở phía dưới biên ràng buộc y = t + 1 chỉ đến điểm (1,2), nghĩa là đến khi t = 1, mà tại thời gian đó ràng buộc trở thành chặt. Khi đó ta phải thay đổi đường lối.

Bây giờ ta hãy quay trở lại (3.274) để tìm chỉ dẫn về đường lối hành động mới phải thực hiện. Thứ nhất, ràng buộc không gian trạng thái $y - t \leq 1$ kéo theo

$$h(t,y) = y - t \qquad c = 1 \qquad \dot{h} = \dot{y} - 1 = u - 1$$

Vì hàm ràng buộc là tuyến tính theo u (nó không chứa u), nó thoả mãn tiêu chuẩn của ràng buộc. Theo (3.273), Lagrange là

$$\mathcal{L}' = (4 - t)\, u + \Lambda\, u - \Theta\, (u - 1)$$

đó là hàm tuyến tính theo u. Theo (3.274), nguyên lý cực đại đòi hỏi rằng

$\mathcal{L}'$ được cực đại theo u (nghiệm góc)

$\dfrac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Theta} = 1 - u \geq 0 \qquad \Theta \geq 0 \qquad \Theta(1 - u)$

$y - t \leq 1 \qquad \Theta(1 - y + t) = 0$

$\dot{\Theta} \leq 0$ (=0 khi ràng buộc không thực sự trói buộc)

$\dot{y} = u$

$\dot{\Lambda} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda =$ hằng số

Không cần thiết điều kiện hoành nào bởi vì các điểm đầu mút cố định.

Theo thông tin từ nghiệm không ràng buộc đã thảo luận trên đây, khởi đầu ta lấy điều khiển u = 2 đối với khoảng thời gian thứ nhất [0,1), điều này kéo theo đường đi trạng thái y = 2t. Như vậy, ta có

$$u^*[0,1) = 2 \qquad y^*[0,1) = 2t \tag{3.276}$$

Ngay khi ta gặp phải biên ràng buộc, Θ trở thành dương và điều kiện $\partial\mathcal{L}'/\partial\Theta$ khiến ta đặt

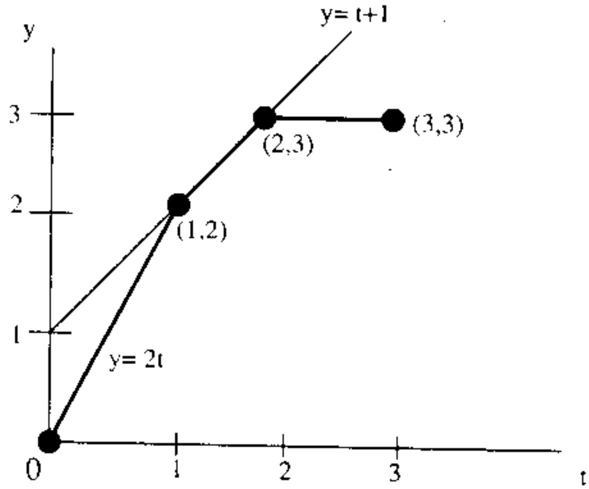
u = 1 (theo điều kiện bù yếu)

Điều này có nghĩa là phương trình chuyển động trở thành $\dot{y} = 1$, và mang lại đường đi $y(t) = t + k_1$. Để xác định hằng số tuỳ ý k_1, từ tính liên tục của y ta lý giải rằng đoạn thứ hai này phải bắt đầu từ điểm (1,2) nơi mà đoạn thứ nhất kết thúc. Sự kiện này giúp ta xác định đường đi là

y(t) = t + 1 (giống như biên ràng buộc)

Như vậy, như đã chỉ ra trong Hình 3.14, đường đi y bây giờ bắt đầu bò dọc theo biên. Nhưng đường đi này rõ ràng không thể đưa ta tới điểm cần

phải đến (3,3), nên ta cần ít nhất một đoạn mới để hoàn thành đường đi. Để xác định đoạn thứ ba, đầu tiên ta cố gắng xác định điều khiển đúng đắn và rồi sử dụng phương trình $\dot{y} = u$.



Hình 3.14

Đối với đoạn thứ nhất, ta đã chọn $u^* = 2$ để đảm bảo sự tăng nhanh nhất trong y, và giữ vững giá trị u đó chừng nào có thể, cho đến khi ràng buộc biên buộc ta thay đổi đường lối. Biên ràng buộc sau đó trở thành đường đi tốt nhất mới, và ta phải ở trên đường đi đó chừng nào còn hợp lý, đến khi ta bị bắt buộc đổi hướng về phía điểm (3,3) bằng sự xem xét vị trí đích. Vì u ($= \dot{y}$) không thể là âm, đi quá mức y = 3 rồi lùi xuống là không khả thi. Cho nên đoạn thứ hai khi đến điểm (2,3) phải nhằm vào y = 3 như mục tiêu của nó. Như vậy, ta có

$$u^*[1,2) = 1 \qquad y^*[1,2) = t + 1 \tag{3.277}$$

Rồi sau đó, đoạn thứ ba là một đường thẳng nằm ngang với độ dốc u = 0:

$$u^*[2,3] = 0 \qquad y^*[2,3] = 3 \tag{3.278}$$

Bằng cách kết hợp (3.276), (3.278) và (3.279) với nhau, cuối cùng ta thu được toàn bộ bức tranh của các đường đi điều khiển và trạng thái tối ưu.

Trong thí dụ hiện tại, đoạn đầu của đường đi tối ưu trùng với đoạn đầu của đường đi tối ưu của bài toán không ràng buộc. Nhưng điều này không luôn luôn xảy ra.

IV. ỨNG DỤNG KINH TẾ CỦA BÀI TOÁN CÓ RÀNG BUỘC KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI

Trong mục này, ta trình bày hai thí dụ kinh tế trong đó có một ràng buộc không gian trạng thái không âm.

4.1. Tồn kho và sản xuất

Thí dụ này liên quan tới quyết định của một công ty về tồn kho và sản xuất. Để bắt đầu, giả sử cầu đối với sản phẩm của công ty được cho tổng quát là $D(t) > 0$. Để đáp ứng nhu cầu này, công ty có thể hoặc rút bớt hàng tồn kho, X, hoặc sản xuất ra đầu ra hiện thời Q bằng lượng cầu đó, hoặc sử dụng kết hợp cả hai. Chi phí sản xuất trên một đơn vị là c, và chi phí lưu kho đối với hàng tồn là s trên một đơn vị, cả hai được giả định là hằng số theo thời gian. Mục tiêu của công ty là cực tiểu tổng chi phí $\int_0^T (cQ + sX)dt$ trên một thời kỳ đã cho $[0,T]$.

Rõ ràng rằng đầu ra không thể âm, và tồn kho cũng vậy. Như vậy $Q(t) \geq 0$ và $X(t) \geq 0$. Hai biến này có quan hệ với nhau trong đó tích luỹ (giảm tích luỹ) hàng tồn kho xảy ra bất cứ khi nào đầu ra vượt hơn (tụt thấp hơn) lượng cầu. Như vậy,

$$\dot{X}(t) = Q(t) - D(t)$$

Điều này gợi ý rằng Q có thể được lấy làm biến điều khiển để lái biến trạng thái X.

Giả sử một mức tồn kho ban đầu X_0, ta có thể biểu diễn bài toán như sau:

Cực đại $\quad \int_0^T (-cQ - sX)\ dt \qquad (3.279.1)$

thoả mãn . $\quad \dot{X} = Q - D(t) \qquad (3.279.2)$

$-X \leq 0 \qquad (3.279.3)$

$X(0) = X_0 \qquad X(T) \geq 0$, tự do, ($X_0$, T cho trước) $\qquad (3.279.4)$

và $\quad Q \in [0,\infty] \qquad (3.279.5)$

Chú ý rằng cực tiểu tổng chi phí đã được chuyển thành cực đại tổng chi phí với dấu âm. Cũng nhận xét rằng ràng buộc không gian trạng thái không âm tự động bắt phải cắt cụt đường cuối thẳng đúng.

Cách nhìn không ràng buộc của bài toán này chỉ ra rằng Hamilton

$$H = -cQ - sX + \lambda(Q - D)$$

là tuyến tính theo biến điều khiển Q, với

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = -c + \lambda$$

Do đó quy tắc chọn Q là

$$\lambda \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} c \qquad \Rightarrow \qquad Q^* \begin{Bmatrix} = 0 \\ kx \\ kbc \end{Bmatrix},$$

trong đó kx= không xác định, kbc= không bị chặn.

Khả năng thứ ba (Q không bị chặn) là không khả thi, còn khả năng thứ hai (Q không xác định) không giúp ích gì. Tuy nhiên, hãy quan sát rằng ngay cả trong trường hợp $\lambda = c$, ta vẫn có thể chọn $Q^* = 0$ như trong trường hợp $\lambda < c$. Thực tế, $Q^* = 0$ có nhiều ý nghĩa vì Q tham gia vào hàm mục tiêu với dấu âm, cho nên chọn giá trị chấp nhận được tối thiểu của Q phục vụ cho mục đích của bài toán tốt nhất. Tuy nhiên, khi đó phương trình chuyển động trở thành

$$\dot{X} = -D(t) < 0 \quad (\text{khi } Q = 0)$$

và tồn kho của công ty sớm muộn cũng phải cạn kiệt. Khi công ty gặp biên ràng buộc X = 0, nó phải định hướng lại điều khiển.

Trước khi áp dụng các điều kiện (3.274), đầu tiên ta kiểm tra lại rằng tiêu chuẩn ràng buộc thoả mãn. Quả thực như vậy, bởi vì hàm ràng buộc - X là tuyến tính theo Q (nó không chứa Q). Từ ràng buộc $-X \le 0$, ta dễ dàng thấy rằng

$$h = -X \qquad c = 0 \qquad \text{và} \qquad \dot{h} = -\dot{X} = -(Q - D)$$

Như vậy, theo (3.273), Lagrange là

$$\mathcal{L}' = -cQ - sX + \Lambda(Q - D) - \Theta(Q - D)$$

là hàm tuyến tính theo biến điều khiển Q. Các điều kiện trong (3.274) đòi hỏi rằng

$$\mathcal{L}' \text{ được cực đại theo } Q \qquad (\text{nghiệm góc})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Theta} = Q - D \geq 0 \qquad \Theta \geq 0 \qquad \Theta(Q - D) = 0$$

$$X \geq 0 \qquad \Theta X = 0$$

$$\dot{\Theta} \leq 0 \qquad [= 0 \quad \text{khi} \quad X > 0]$$

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Lambda} = Q - D$$

$$\dot{\Lambda} = -\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial X} = s$$

$$\Lambda(T) \geq 0 \qquad X(T) \geq 0 \qquad \Lambda(T)X(T) = 0$$

Từ cách nhìn không ràng buộc của bài toán, đầu tiên ta chọn

$$Q = 0$$

Điều đó làm đơn giản hoá phương trình trạng thái trở thành:

$$\dot{X} = -D$$

Kết quả này chỉ rằng công ty không nên sản xuất gì cả và đáp ứng nhu cầu hoàn toàn bằng việc giảm tích luỹ tồn kho. Trong khi theo quy tắc này, tồn kho tại thời gian bất kỳ sẽ là

$$X = X_0 - \int_0^t D(t)dt$$

Nhưng chính sách như vậy có thể tiếp tục chỉ đến thời gian $t = \tau$, khi tồn kho đã cho bị cạn kiệt. Giá trị của τ, điểm mối nối, có thể tìm được từ phương trình

$$\int_0^\tau D(t)dt = X_0 \quad \text{[khi cạn kiệt tồn kho]}$$

Nếu ta giả định rằng $\tau < T$, thì tại $t = \tau$ ta phải xem xét lại chính sách không sản xuất.

Phần còn lại rất đơn giản. Khi không còn lại chút tồn kho nào, công ty phải bắt đầu sản xuất. Theo các thuật ngữ của nguyên lý cực đại, tác động của ràng buộc làm cho nhân tử Θ dương, nên $\partial \mathcal{L}'/\partial \Theta = 0$, hay

$$Q = D \qquad \text{đối với } t \in [\tau, T]$$

Theo quy tắc mới này, công ty phải đáp ứng toàn bộ nhu cầu từ sản xuất hiện thời. Vì $\dot{X} = Q - D$, suy ra rằng

$$\dot{X} = 0 \qquad \text{đối với } t \in [\tau, T]$$

Nghĩa là không nên dự định một thay đổi nào trong tồn kho. Vì $X(\tau) = 0$, lượng tồn kho phải ở mức 0 từ điểm τ trở đi. Do đó, toàn bộ các đường đi điều khiển tối ưu và trạng thái là

$$\begin{aligned} &Q^*[0,\tau) = 0 && X^*[0,\tau) = X_0 - \int_0^t D(t)dt \\ &Q^*[\tau,T] = D(t) && X^*[\tau,T] = 0 \end{aligned} \qquad (3.280)$$

4.2. Tích luỹ vốn trong điều kiện ràng buộc tài chính

William Schworm đã phân tích một công ty không có khả năng vay mượn và tự đầu tư hoàn toàn. Mô hình này là một minh hoạ khác cho bài toán có ràng buộc của không gian trạng thái.

Giả thiết công ty đó có tổng lợi nhuận $\pi(t,K)$, đầu tư $I(t)$ và không thể bán vốn đang được sử dụng. Vì vậy, $I(t) \geq 0$. Ngoài ra, nó không thể vay mượn vốn. Như vậy luồng tiền $\phi(t)$ chỉ phụ thuộc vào lợi nhuận thu được và chi đầu tư:

$$\phi(t) = \pi(t,K) - I(t)$$

Mục tiêu của công ty là cực đại hoá giá trị qui về hiện tại của luồng tiền:

$$\int_0^{\infty} \phi(t)e^{-\rho t}dt$$

ở đây, ρ ký hiệu tỷ lệ lãi mà các cổ đông có thể thu được từ việc đầu tư khác cũng như tỷ lệ lãi mà công ty có thể thu được trên phần thu nhập giữ lại của công ty.

Bắt đầu từ một mức đã cho, phần thu nhập giữ lại $R(t)$ có thể gia tăng chỉ bởi bất kỳ tiền lời thu được nào (với tỷ lệ ρ) từ R và bởi bất kỳ luồng tiền dương nào. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \rho R(t) + \phi(t) \\ &= \rho R(t) + \pi(t,K) - I(t) \end{aligned}$$

Giả sử không có khấu hao, ta cũng có

$$\dot{K}(t) = I(t)$$

Hai phương trình vi phân này gợi ý rằng R và K có thể dùng làm các biến trạng thái của mô hình, còn I có thể đóng vai trò biến điều khiển. Tất nhiên, cả hai biến trạng thái R và K phải không âm. Nhưng trong khi giả

thiết $I(t) \geq 0$ tự động bảo đảm tính không âm của K, tính không âm của thu nhập giữ lại R cần được mô tả dưới dạng hiển trong bài toán. Đó là lý do bài toán này có một ràng buộc không gian trạng thái.

Tập hợp tất cả những yếu tố đã nói ở trên lại, ta có thể phát biểu bài toán như sau:

Cực đại $$\int_0^{\infty}[\pi(t,K) - I(t)]e^{-\rho t}\,dt \tag{3.281.1}$$

Thoả mãn $$\dot{R}(t) = \rho R(t) + \pi(t,K) - I(t) \tag{3.281.2}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) \tag{3.281.3}$$

$$-R(t) \leq 0 \tag{3.281.4}$$

$$R(0) = R_0 \qquad K(0) = K_0 \tag{3.281.5}$$

và $$I(t) \in [0,\infty) \tag{3.281.6}$$

Khi được cho ở dạng hàm tổng quát, mô hình này chỉ được phân tích một cách định tính. Thực tế, Schworm đầu tiên chuyển mô hình này thành mô hình trong đó R(t) là một biến điều khiển (chứ không phải biến trạng thái) có ràng buộc. Nhưng ở đây sẽ giải quyết nó như một mô hình với một ràng buộc không gian trạng thái và rút ra một vài kết quả chính của Schworm bằng cách sử dụng các điều kiện nguyên lý cực đại trong (3.274).

Ta có thể kiểm tra lại rằng tiêu chuẩn ràng buộc chất lượng thoả mãn, bởi vì hàm ràng buộc, -R(t), là tuyến tính theo biến điều khiển I. Hàm ràng buộc cũng cung cấp thông tin rằng

$$h = -R \Rightarrow \qquad \dot{h} = -\dot{R} = -[\rho R + \pi(t,K) - I]$$

Như vậy, theo (3.273), ta có Lagrange

$$\mathcal{L}' = [\pi(t,K) - I]e^{-\rho t} + \Lambda_R[\rho R + \pi(t,K) - I] + \Lambda_K I + \Theta[\rho R + \pi(t,K) - I]$$

ở đây, Λ_R và Λ_K tương ứng là các biến hiệp trạng thái đối với R và K. Các điều kiện trong (3.274) phát biểu rằng

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial I} = -e^{-\rho t} - \Lambda_R + \Lambda_K - \Theta \leq 0, \qquad I \geq 0, \qquad I\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial I} = 0 \tag{3.282}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Theta} = \rho R + \pi(t,K) - I \geq 0, \qquad \Theta \geq 0, \qquad \Theta\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Theta} = 0$$
$$\dot{R}(t) \geq 0 \qquad \Theta R(t) = 0$$

$$\dot{\Theta} \le 0 \qquad (= 0 \quad \text{khi} \quad R > 0) \tag{3.283}$$

$$\dot{R} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Lambda_R} = \rho R + \pi(t, K) - I$$

$$\dot{K} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Lambda_K} = I$$

$$\dot{\Lambda}_R = -\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial R} = -\rho(\Lambda_R + \Theta) \tag{3.284}$$

$$\dot{\Lambda}_K = -\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial K} = -\pi_K(e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta) \tag{3.285}$$

và các điều kiện hoành

Nhận xét rằng, do điều kiện không âm đối với biến điều khiển I, các điều kiện Kuhn-Tucker được áp dụng trong (3.282)

Trong khi Schworm thảo luận cả trường hợp I(t) > 0 lẫn I(t) = 0, ở đây sẽ chỉ xét hành vi tối ưu đối với trường hợp I(t) > 0. Với I dương, điều kiện bù yếu đòi hỏi $\partial\mathcal{L}'/\partial I = 0$, hay

$$\Lambda_K = e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta \qquad \text{[theo (3.282)]}$$

Đạo hàm phương trình này theo t, ta được

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_K &= -e^{-\rho t} + \dot{\Lambda}_R + \dot{\Theta} \\ &= -\rho e^{-\rho t} - \rho(\Lambda_R + \Theta) + \dot{\Theta} \qquad \text{[theo (3.284)]} \\ &= -\rho(e^{-\rho t} + \dot{\Lambda}_R + \Theta) + \dot{\Theta}\end{aligned}$$

Hơn nữa, bằng cách đặt biểu thức $\dot{\Lambda}_K$ này bằng với (3.285) ta thấy rằng

$$-\pi_K(e^{-\rho t} + \Lambda_R + \Theta) = -\rho(e^{-\rho t} + \dot{\Lambda}_R + \Theta) + \dot{\Theta} \tag{3.286}$$

Kết quả này biểu thị quy tắc tối ưu đối với công ty khi I > 0.

Điều thú vị là, trừ số hạng $\dot{\Theta}$ ở vế phải, hai vế của (3.286) có cấu trúc trùng nhau. Từ (3.283) ta biết rằng $\dot{\Theta} = 0$ khi R > 0. Như vậy, từ (3.286) ta có thể kết luận rằng bất cứ khi nào R > 0, công ty phải nhìn nhận

$$\pi_K = \rho \qquad \text{(quy tắc đầu tư khi } R > 0) \tag{3.287}$$

Nghĩa là, khi thu nhập còn giữ lại công ty là dương (ràng buộc tài chính không thực sự trói buộc), công ty chỉ cần theo quy tắc nhìn gần là lợi nhuận biên của vốn bằng tỷ lệ lãi theo thị trường.

Mặt khác, nếu R = 0 (ràng buộc tài chính thực sự chặt) trong một khoảng thời gian nào đó (t_1,t_2), thì suy ra rằng R = 0 và $\dot{R} = 0$ trong khoảng đó. Vì vậy, phương trình $\dot{R}(t)$ trong (3.281) rút gọn thành

$$I(t) = \pi(t,K) \qquad \text{(quy tắc đầu tư khi } R = \dot{R} = 0) \qquad (3.288)$$

Điều này có nghĩa là trong một khoảng bị ràng buộc, công ty phải đầu tư lợi nhuận hiện thời của nó. Do đó, ta thấy rằng khi ràng buộc R thực sự chặt, đầu tư trở nên bị ràng buộc thêm bởi khả năng lợi nhuận hiện thời.

Các quy tắc (3.287) và (3.288), mặc dù tách biệt nhau, đã thường được sử dụng kết hợp, chuyển từ một quy tắc sang quy tắc kia khi trạng thái của ràng buộc R thay đổi. Bằng cách đó, công ty sẽ có thể ở gần nhất với đường đi vốn tối ưu không ràng buộc. Schworm cũng rút ra các kết luận phân tích khác.

4.3 Chính sách tài chính và vấn đề tăng trưởng kinh tế

Để làm ví dụ tổng hợp việc ứng dụng phương pháp tối ưu hóa động trong nghiên cứu kinh tế, mục này sẽ trình bày mô hình tăng trưởng kinh tế của Paul Cashin và việc lựa chọn chính sách tài chính của Chính phủ dựa trên mô hình đó.

4.3.1. Mô hình tăng trưởng kinh tế

Mối liên hệ giữa chính sách tài chính của Chính phủ và tốc độ tăng trưởng kinh tế của một nước là đề tài được bàn bạc và nghiên cứu nhiều nhất hiện nay.

Chính sách tài chính của Chính phủ bao gồm quyết định về số thuế phải thu và số tiền mà Chính phủ chi tiêu hàng năm. Kinh tế học ngày nay đã có thể đặt ra và giải bài toán lựa chọn chính sách tài chính tốt nhất. Dĩ nhiên công việc như thế còn đang được nghiên cứu làm cho tốt hơn nữa.

Lý luận kinh tế cho đến nửa đầu thế kỷ XX phần nhiều được trình bày bằng lời. Sự mô tả bằng lời luôn luôn là cần thiết để nêu lên mọi khía cạnh của hiện tượng kinh tế và những mối liên hệ nhiều mặt giữa chúng. Nhưng lý luận bằng lời đem lại lợi ích thực hành thường là eo hẹp đối với việc lựa chọn quyết định cụ thể. Bởi vì, trước hết, người ta rất khó kiểm tra tính đúng đắn của một bài văn về mặt suy luận cũng như mức độ phù hợp của

nó so với thực tế có thể quan sát được. Sau nữa, trong trường hợp kết luận của bài văn là đúng, nó chỉ cho ta biết phương hướng tác động giữa các hiện tượng, chẳng hạn như nói rằng cần phải tăng thuế nhưng không giải thích được vì sao tăng 2% mà không phải là 1%. Vì thế, khoa học kinh tế không dừng lại ở sự mô tả bằng lời mà đi lên sự mô tả bằng ngôn ngữ chính xác thông qua các mô hình. Nhờ mô hình ta có thể đánh giá được ảnh hưởng của chính sách kinh tế bằng con số.

Mô hình tăng trưởng kinh tế, mô tả quá trình sản xuất của một nước trong đó hoạt động kinh tế ở thời kỳ trước mắt có ảnh hưởng đến hoạt động kinh tế ở thời kỳ sau. Sự mô tả này tạo ra khả năng nhìn trước được những con đường tăng trưởng có thể có và chọn trong đó con đường tốt nhất.

Những mô hình tăng trưởng tân cổ điển được đưa ra đầu tiên khoảng giữa thế kỷ XX. Những mô hình này không nêu lên vai trò của chính sách tài chính mà chỉ xét tác dụng của đầu tư đối với sự tăng trưởng vốn sản xuất và tổng sản phẩm.

Kết luận của các mô hình này là tốc độ tăng trưởng kinh tế về lâu dài sẽ đi đến mức ổn định và mức ổn định này không phụ thuộc vào tỷ lệ tiết kiệm trong tổng sản phẩm.

Do đó mô hình được gọi là mô hình tăng trưởng ngoại sinh, ý muốn nói mô hình nhấn mạnh ảnh hưởng của các yếu tố như tiến bộ kỹ thuật và sự tăng dân số là những yếu tố mà phần lớn nằm ngoài hệ thống kinh tế.

Khác với các nhà kinh tế Tân cổ điển nói trên, nhiều nhà kinh tế hiện đại như Barro, Sala-i-Martin,...xây dựng mô hình tăng trưởng, trong đó nhấn mạnh vai trò của các yếu tố, nằm trong hệ thống kinh tế như tiết kiệm, chính sách thuế và chi tiêu của Chính phủ đối với tốc độ tăng trưởng kinh tế dài hạn. Loại mô hình này gọi là mô hình tăng trưởng nội sinh.

4.3.2. Mô hình Cashin

Trong mục này, ta lấy mô hình tăng trưởng kinh tế, chi tiêu chính phủ và thuế của Paul Cashin để làm thí dụ minh hoạ cho tối ưu hoá động trong kinh tế. Thông qua việc trình bày mô hình ta sẽ thấy tối ưu hoá động có thể giải quyết các vấn đề thực tế như thế nào.

4.3.2.1. Hàm sản xuất tư nhân

Giả thiết nền kinh tế có N hộ gia đình vừa là đơn vị sản xuất tư nhân vừa là đơn vị tiêu dùng, ta gọi là hãng gia đình.

Cho $y = y(t)$ - sản phẩm cuối cùng mà một hãng gia đình trung bình làm ra trong thời kỳ t, thì sản phẩm cuối cùng của cả nền kinh tế là $Y = Ny$ trong thời kỳ t.

Khối lượng sản phẩm y(t) mà mỗi hãng gia đình làm ra, trước hết phụ thuộc số vốn vật chất tư nhân. $k = k(t)$ - số vốn tư nhân trung bình của một hãng. Số vốn tư nhân của cả nền kinh tế là $K = Nk(t)$.

Yếu tố thứ hai làm nâng cao kết quả sản xuất tư nhân là vốn công gồm đường sá, bến cảng, sân bay công cộng v.v... Cùng một khối lượng vốn công, hiệu quả của nó đối với sản xuất tư nhân phụ thuộc vào mức độ mà các hãng gia đình sử dụng nó. Chẳng hạn, trên một con đường công cộng, lưu lượng xe cộ càng nhiều thì hiệu quả chuyên chở hàng hóa càng kém.

$G = G(t)$- số vốn công, ta có thể mô tả tác dụng của vốn công đối với sản xuất tư nhân thông qua tỷ lệ vốn công so với tổng số vốn tư G/K.

Số tiền mà Chính phủ lấy từ thuế và đem giúp đỡ các hãng kinh doanh nhằm điều chỉnh hoạt động kinh tế hoặc trợ cấp cho những người thất nghiệp được gọi là "trợ cấp" hoặc "chuyển giao" (transfer). Trước đây có lý thuyết cho rằng, với một thuế suất nhất định đánh vào vốn hoặc sản phẩm tư nhân, việc phân phối lại thu nhập trong nền kinh tế thông qua sự "trợ cấp" sẽ gây ảnh hưởng kìm hãm đối với tăng trưởng kinh tế. Nhưng những nghiên cứu gần đây với sự kiểm tra thông qua số liệu quan sát thực tế cho thấy điều ngược lại: trợ cấp thực sự có tác dụng thúc đẩy sự tăng trưởng kinh tế nhờ nó tạo điều kiện thuận lợi cho việc sử dụng có hiệu quả vốn tư nhân. Chẳng hạn, chính sách trợ cấp thất nghiệp tạo điều kiện thuận lợi cho việc chọn lao động có năng suất cao.

Cho $T = T(t)$ - số tiền trợ cấp ở thời kỳ t. Cũng như đối với vốn công, sản xuất của hãng gia đình phụ thuộc vào tỷ lệ T/K.

Giả thiết trình độ công nghệ không thay đổi, hàm sản xuất tư nhân của hãng gia đình có thể mô tả bởi dạng sau:

$$y = Ak\left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{T}{K}\right)^{\beta} \tag{3.289}$$

Trong đó A > 0 - tham số biểu thị mức công nghệ, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - độ co giãn của tỷ lệ vốn công và độ co giãn của tỷ lệ trợ cấp.

Từ hàm sản xuất (3.289), lấy đạo hàm riêng của y theo k với $\frac{G}{K}, \frac{T}{K}$ không đổi

$$\frac{\partial y}{\partial k} = A\left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{T}{K}\right)^{\beta} \tag{3.290}$$

Điều này thực chất là sự mô tả bằng toán học ý tưởng cho rằng hiệu quả biên của việc sử dụng vốn tư nhân phụ thuộc chính sách tài chính của Chính phủ về cung cấp vốn $\frac{G}{K}$ và trợ cấp $\frac{T}{K}$. Các nhân tố khác như nguồn thiên nhiên, nguồn lao động, trình độ công nghệ được giả thiết không đổi và được mô tả bởi hệ số A.

4.3.2.2. Sự hoạt động của nền kinh tế - Vai trò của tư nhân và vai trò của Chính phủ

Giả thiết việc sản xuất là do các hãng gia đình gánh vác trực tiếp. Chính phủ đóng vai trò tạo ra những điều kiện thuận lợi cho công việc sản xuất tư nhân thông qua chính sách tài chính. Hiệu quả sản xuất của hãng gia đình phát huy nhờ động cơ theo đuổi lợi ích riêng về tiêu dùng sản phẩm và sự sử dụng quyền tư hữu tài sản. Trong trường hợp trình độ công nghệ và dân số không đổi, việc sử dụng quyền tư hữu thể hiện ở quyết định tiết kiệm nhằm đầu tư mở rộng sản xuất.

Chính sách tài chính của Chính phủ, một mặt thúc đẩy sản xuất tư nhân thông qua việc chi tiêu mở rộng vốn công cộng G và chi tiêu trợ cấp T. Nhưng mặt khác, nguồn chi tiêu đó được lấy từ thuế đánh vào sản phẩm tư nhân, tức là giảm bớt phạm vi sử dụng quyền tư hữu, do đó kìm hãm sản xuất.

Sự thành công của chính sách tài chính là ở chỗ kết hợp giữa chính sách thuế và chính sách chi tiêu công cộng sao cho đem lại kết quả tổng hợp là thúc đẩy tốc độ tăng trưởng sản xuất của cả nền kinh tế. Chính vì để làm nổi bật sự thành công này của chính sách tài chính mà mô hình chỉ xét một yếu tố tăng trưởng kinh tế là khối lượng vốn sản xuất, và các yếu tố tăng trưởng kinh tế khác như nguồn thiên nhiên, dân số và trình độ công nghệ

thay đổi, cũng như giả thiết sự cân bằng cung cầu luôn luôn được giữ vững trong quá trình hoạt động kinh tế.

4.3.2.3. Ảnh hưởng của chính sách tài chính

Giả thiết Chính phủ đánh thuế vào tổng sản phẩm với thuế suất τ_1 nhằm lấy tiền cho quỹ đầu tư vào vốn công:

$$\dot{G} = \tau_1 Y \tag{3.291}$$

Trong đó: $\dot{G} = \dfrac{dG}{dt}$ là đầu tư mở rộng vốn công.

$Y = Ny(t)$ là tổng sản phẩm ở thời kỳ t.

Đồng thời, Chính phủ đánh thuế với thuế suất τ_2 đối với tổng sản phẩm để chi tiêu cho trợ cấp:

$$T = \tau_2 Y \tag{3.292}$$

Trong đó $T = T(t)$ là số tiền trợ cấp ở thời kỳ t.

Như vậy, thu nhập còn lại thuộc quyền sử dụng của hãng gia đình là:

$(1 - \tau_1 - \tau_2)y$ với $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_1 + \tau_2 < 1$

4.3.2.4. Hành vi của hãng gia đình

Hãng gia đình chia thu nhập thuộc quyền sử dụng của mình ra phần tiêu dùng $c = c(t)$ và phần sản phẩm đem đầu tư mở rộng vốn sản xuất tư nhân:

$$\dot{k} = (1 - \tau_1 - \tau_2)\, y - c \tag{3.293}$$

Trong đó: $\dot{k} = \dfrac{dk}{dt}$

$$y = Ak\left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{T}{K}\right)^{\beta}$$

Giả thiết hãng gia đình lựa chọn mức tiêu dùng c(t) nhằm làm cực đại tổng lợi ích tiêu dùng qua thời gian.

$$U = \int_0^{\infty} U[c(t)]e^{-\rho t}dt \tag{3.294}$$

Trong đó $e^{-\rho t}$ là hệ số chiết khấu theo thời gian với $\rho > 0$. Ý nghĩa của hệ số chiết khấu là một lợi ích U thu được sau khoảng thời gian t được đánh giá bằng $Ue^{-\rho t}$ lợi ích thu được hiện tại.

Việc đầu tư đòi hỏi hãng gia đình đánh giá số lợi ích bị giảm bớt khi nhịn tiêu dùng thêm một đơn vị trong hiện tại và số lợi ích được thêm do thêm một đơn vị tiêu dùng trong tương lai.

Cho $V_0 = U[c_0]$ và $V_t = U[c_t] = e^{-\rho t}\ U[c(t)]$ (3. 295)

là lợi ích tiêu dùng ở hiện tại t = 0 và ở thời kỳ t > 0. Tỷ số:

$$s_t = -\frac{dc_t}{dc_0} = \frac{\partial V_0 / \partial c_0}{\partial V_t / \partial c_t} \qquad (3.\ 296)$$

được gọi là hệ số thay thế tiêu dùng giữa thời kỳ 0 và thời kỳ t. Hệ số thay thế nói rằng về mặt lợi ích, sự giảm bớt đơn vị tiêu dùng hiện tại phải được bù đắp ít nhất bởi sự tăng thêm s đơn vị tiêu dùng trong tương lai t.

c_t/c_0 và s có sự phụ thuộc lẫn nhau:

Tỷ số:

$$\sigma_t = \frac{d\ln \frac{c_t}{c_0}}{d\ln s_t} \qquad (3.\ 297)$$

được gọi là độ giãn thay thế tiêu dùng giữa các thời kỳ 0 và thời kỳ t.

Giả thiết độ giãn thay thế không đổi theo t.

Ta có thể suy ra hàm U (c) có dạng

$$U(c) = (c^{1-\sigma} - 1)/(1 - \sigma) \qquad (3.\ 298)$$

4.3.2.5. Sự tăng trưởng kinh tế cân đối

Quá trình phát triển kinh tế trong đó sản xuất, tiêu dùng, tích luỹ tăng với tốc độ không đổi theo thời gian được gọi là tăng trưởng cân đối. Dưới đây chúng ta sẽ nghiên cứu về khả năng tăng trưởng cân đối trong khuôn khổ mô hình Cashin.

Sức sản xuất của mỗi hãng gia đình có thể xem là khá nhỏ bé so với cả nền kinh tế. Khi lựa chọn quyết định tiêu dùng và đầu tư, hãng gia đình

xem chính sách tài chính của Chính phủ đặc trưng bởi các suất thuế τ_1, τ_2 và tác động $B = \left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{T}{K}\right)^{\beta}$ là cho trước.

4.3.2.6. Bài toán của hãng gia đình

Chọn chương trình tiêu dùng c = c (t), t $\geq$ 0, sao cho tổng lợi ích tiêu dùng.

$$\int_0^{\infty} U(c)e^{-\rho t}dt \to \max, \qquad \rho > 0 \qquad (3.\ 299.1)$$

$$\dot{k} = (1 - \tau_1 - \tau_2)\, y - c, \quad \tau_1 > 0,\ \tau_2 > 0,\ \tau_1 + \tau_2 < 1 \qquad (3.299.2)$$

Và

$$y = A\,k\,B,\ A > 0,\ B = \left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{T}{K}\right)^{\beta},\ K = Nk,\ \alpha > 0,\ \beta > 0, \qquad (3.\ 299.3)$$

Điều kiện đầu $k(0)=k_0$, $(G(0)/K(0))=(G/K)_0$, $(T(0)/K(0))=(T/K)_0$.

Giả thiết τ_1, τ_2,T(t)/K(t), G(t)/K(t) và $\dot{G} = \frac{dG}{dt}$ là cho trước.

trong đó $U(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$, $\quad 0 < \sigma < 1$

Bài toán có thể giải dựa trên nguyên lý cực đại với c là biến điều khiển, k là biến trạng thái. Hàm Hamilton là:

$$H(k, c, \lambda, t) = e^{-\rho t}U(t) + \lambda[(1 - \tau_1 - \tau_2) A\,B\,k - c]$$

Về mặt ý nghĩa kinh tế, ta có thể giả thiết rằng trong lời giải biến điều khiển tối ưu c phải nhận giá trị dương, tức là điểm trong thuộc miền giá trị của nó. Do đó lời giải phải thoả mãn các điều kiện cần:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \qquad (3.300)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} \qquad (3.301)$$

và điều kiện hoành:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = 0 \qquad (3.302)$$

Phương trình (3.300) cho ta

$$\frac{\partial H}{\partial c}=\frac{\partial}{\partial c}\left[e^{-\rho t}U(c)\right]-\lambda\ =0$$

hay $\frac{\partial}{\partial c}\left[e^{-\rho t}U(c)\right]=\lambda$ (3.303)

Ý nghĩa của điều kiện này là ở mỗi thời kỳ lợi ích biên của tiêu dùng c phải bằng giá bóng λ.

Thay $U(c)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ vào vế trái của (3.303) ta được:

$$\frac{\partial}{\partial c}\left[e^{-\rho t}.\frac{\left(c^{1-\sigma}-1\right)}{1-\sigma}\right]=e^{-\rho t}c^{-\sigma}=\lambda \qquad (3.\ 303')$$

Bằng cách lấy lôga rồi lấy đạo hàm (3. 303') ta đi đến:

$$-\left(\rho+\sigma\frac{\dot{c}}{c}\right)=\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

hay $\rho+\rho\gamma_c=-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ (3.304)

Trong đó, $\gamma_c=\frac{\dot{c}}{c}$ là tốc độ tăng tiêu dùng.

Mặt khác, phương trình (3.301) cho ta

$$-\frac{\partial H}{\partial k}=-\lambda(1-\tau_1-\tau_2)AB=\dot{\lambda}$$

hay $(1-\tau_1-\tau_2)AB=\frac{-\dot{\lambda}}{\lambda}$ (3.305)

Từ (3.304), (3.305) ta đi đến:

$$\rho+\sigma\gamma_c=(1-\tau_1-\tau_2)AB \qquad (3.306)$$

Từ điều kiện hoành có thể chỉ ra rằng ở trạng thái ổn định, tốc độ tăng vốn tư nhân γ_k là hằng số.

Từ phương trình chuyển động ta có:

$$\gamma_k=\frac{\dot{k}}{k}=(1-\tau_1-\tau_2)AB-\frac{c}{k}$$

Ở trạng thái ổn định thì:

$$\frac{c}{k} = (1 - \tau_1 - \tau_2)AB + \gamma_K = \text{const}$$

Do đó:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} \text{ hay viết là } \gamma_c = \gamma_k \qquad (3.308)$$

tức là tốc độ tăng tiêu dùng bằng tốc độ tăng vốn và là hằng số:

Do y = A k B, ta có tốc độ tăng sản phẩm

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \gamma_k \qquad (3.309)$$

Vậy, nếu Chính phủ bằng chính sách tài chính giữ cho $B = \left[\frac{G(t)}{K(t)}\right]^{\alpha}\left[\frac{T(t)}{K(t)}\right]^{\beta} = \text{const}$ thì (3.308),(3.309) cho thấy nền kinh tế sẽ tăng trưởng cân đối với tốc độ tăng sản phẩm, tăng tiêu dùng, tăng vốn không đổi và bằng nhau:

$$\gamma = \gamma_c = \gamma_k \qquad (3.310)$$

4.3.2.7. Chính sách tài chính cân đối tối ưu

Đặt $g = \frac{G}{K}$, $h = \frac{T}{K}$; ta sẽ thấy rằng chỉ cần tốc độ đầu tư vào vốn công:

$$\frac{\dot{G}}{G} = \gamma \qquad (3.311)$$

và thoả mãn các ràng buộc

$$\dot{G} = \tau_1 A K g^{\alpha} h^{\beta}$$

$$T = \tau_2 A K g^{\alpha} h^{\beta}$$

thì $B = g^{\alpha} h^{\beta}$ sẽ không thay đổi theo t.

Thực vậy, với $g = \frac{G}{K}$, (3.310) và biểu thức trên cho ta

$$\gamma G = \tau_1 AK g^{\alpha} h^{\beta}$$

hay $$h^{\beta} = A^{-1} g^{1-\alpha} \tau_1^{-1} \gamma \tag{3.312}$$

Mặt khác, với $h = \dfrac{T}{K}$, ta có

$$h^{1-\beta} = A g^{\alpha} \tau_2$$

hay

$$h^{\beta} = A^{\frac{\beta}{1-\beta}} g^{\frac{\alpha\beta}{1-\beta}} \tau_2^{\frac{\beta}{1-\beta}} \tag{3.313}$$

Từ (3.312), (3.313) ta có:

$$A^{-1} g^{1-\alpha} \tau_1^{-1} \gamma = A^{\frac{\beta}{1-\beta}} g^{\frac{\alpha\beta}{1-\beta}} \tau_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

Lấy loga hai vế và giải ra $\ln\gamma$:

$$\ln g = \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left[\ln A + (1-\beta)\ln\tau_1 + \beta\ln\tau_2 + (1-\beta)\ln\gamma\right] \tag{3.314}$$

Từ (3. 229) và (3.317), (3.314) ta đi đến

$$\ln AB = \alpha \ln g + \beta \ln h + \ln A$$

$$= \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left[\ln A - \alpha\ln\gamma + \alpha\ln\tau_1 + \beta\ln\tau_2\right] \tag{3.315}$$

Vậy AB không thay đổi, tưc B không thay đổi theo t.

Do $\gamma_c = \gamma_k = \gamma$, điều kiện (3.306) viết là:

$$\ln(\rho + \sigma\gamma) = \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left[\ln A - \alpha\ln\gamma + \alpha\ln\tau_1 + \beta\ln\tau_2\right] + \ln(1-\tau_1-\tau_2) \tag{3.316}$$

Tốc độ tăng trưởng γ phụ thuộc τ_1, τ_2. Chính phủ có thể lựa chọn τ_1, τ_2 sao cho γ cực đại.

Lấy đạo hàm riêng hai vế (3. 316) theo τ_1, τ_2:

$$\frac{\sigma\gamma'_{\tau_1}}{\rho+\sigma\gamma} = \frac{-\alpha\gamma'_{\tau_1}}{(1-\alpha-\beta)\gamma} + \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)\tau_1} - \frac{1}{1-\tau_1-\tau_2} \tag{3.317}$$

$$\frac{\sigma\gamma'_{\tau_2}}{\rho+\sigma\gamma} = \frac{-\alpha\gamma'_{\tau_2}}{(1-\alpha-\beta)\gamma} + \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)\tau_2} - \frac{1}{1-\tau_1-\tau_2} \tag{3.318}$$

Ở điểm γ cực đại, ta phải có $\gamma'_{\tau_1} = \gamma'_{\tau_2} = 0$ cho nên từ (3.317), (3.318) ta đi đến

$$\frac{\alpha}{\tau_1} = \frac{\beta}{\tau_2}$$

hay $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\beta}{\alpha}$ (3.319)

Điểm (τ_1, τ_2) thoả mãn (3.319) chính là điểm đem lại γ cực đại.

Như vậy theo mô hình này thì nếu chính phủ lựa chọn chính sách tài chính theo quy tắc đã chỉ ra ở (3.319) sẽ làm cho tốc độ tăng trưởng đạt cực đại.

CHƯƠNG IV

QUY HOẠCH ĐỘNG

Chương này giới thiệu tư tưởng cơ bản và ứng dụng của phương pháp quy hoạch động mà không đi sâu vào trình bày về mặt lý thuyết. Như đã biết quy hoạch động là một phương pháp mạnh để nghiên cứu bài toán tối ưu động. Nó cho phép phân rã bài toán có số chiều rất lớn thành một tập hợp nhiều bài toán tối ưu nhỏ hơn để có thể giải lần lượt. Cách phân rã làm đơn giản việc tính toán và đem lại phân tích sâu sắc. Trong phần I của chương này, chúng ta cùng xem xét phương pháp của quy hoạch động. Phần II trình bày bài toán dãy. Phần III trình bày một số ứng dụng của quy hoạch động trong kinh tế vào một lớp các bài toán mà cho phép tìm được lời giải của bài toán dưới dạng các hàm giải tích - điều này rất bổ ích trong phân tích chính sách.

I. GIỚI THIỆU QUY HOẠCH ĐỘNG

1.1. Bài toán quy hoạch động

Để dễ dàng cho việc trình bày, ta xét một quá trình điều khiển tất định rời rạc có dạng sau:

$$V = \sum_{t=0}^{N-1} r_t[x(t), u(t)] \to \max$$

$$x(t) \in X_t$$

$$u(t) \in \mathcal{U}_t(x(t))$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(t+1) = T_t\,[x(t), u(t)]$$

$$\text{với } t = 0,1,2,......, N$$

V là mục tiêu của quá trình N bước;

X_t là tập hợp các trạng thái có thể của hệ ở bước t;

$\mathcal{U}_t$ là tập hợp quyết định có thể chọn ở bước t phụ thuộc vào trạng thái của hệ ở bước đó;

x_0 là trạng thái cho trước của hệ ở bước $t = 0$;

$x(t + 1) = T_t [x(t), u(t)]$ là phương trình chuyển trạng thái của hệ từ x_t sang trạng thái x_{t+1} dưới ảnh hưởng của quyết định u(t).

Dĩ nhiên ta giả thiết rằng, đây là một hệ thống điều khiển được và ta có thể chia quá trình điều khiển thành các bước (hoặc các giai đoạn), cụ thể là một quá trình N bước. Các bước có thể có sẵn một cách tự nhiên, chẳng hạn như năm hoặc quý trong thời kỳ kế hoạch phát triển kinh tế, nhưng trong nhiều trường hợp các bước được chia ra có tính chất quy ước, chẳng hạn ta có thể phân chia khoảng thời gian phát triển của đối tượng thành N giai đoạn với độ dài mỗi giai đoạn là một khoảng nào đó. Về mặt hình học ta có thể hình dung rằng, quỹ đạo phát triển được chia thành N đoạn.

Để tìm được chiến lược (hoặc quỹ đạo) tối ưu, thì phương pháp quen thuộc và tự nhiên là so sánh liên tiếp các chiến lược chấp nhận được, với tiêu chuẩn so sánh cho bởi hàm mục tiêu V. Số chiến lược chấp nhận được, có thể và thường thường, là vô số. Do đó người ta dựa vào đặc điểm của đối tượng điều khiển (tức là vào dạng của bài toán cực trị) để gạt bỏ trước một số lớn chiến lược mà ta biết rằng việc bỏ qua đó không ảnh hưởng gì tới mục đích đặt ra. Sau đó trong số các chiến lược còn lại, người ta sẽ tìm một phương pháp đi (di chuyển) từ một chiến lược sang một chiến lược mới tốt hơn. Tiêu biểu cho tư tưởng này là phương pháp đơn hình trong quy hoạch tuyến tính, ở đó đối tượng so sánh là các phương án (tức là các chiến lược theo ngôn ngữ ở đây) cực biên. Một cách khác, đó là phương pháp gradient mà nội dung của nó để đi tới chiến lược tối ưu, chúng ta đi theo hướng chấp nhận được mà trị số của hàm mục tiêu tăng (giảm) nhanh nhất.

Phương pháp quy hoạch động khác với các phương pháp nêu trên ở chỗ ta không so sánh trực tiếp các chiến lược với nhau, ở đây ta sẽ lựa chọn quyết định trong từng bước một và phối hợp quyết định giữa các bước với nhau để làm nên chiến lược tối ưu. Vấn đề đặt ra là phải chọn và phối hợp các quyết định đó như thế nào. Phải chăng trong mỗi bước ta chỉ cần chọn

một quyết định sao cho làm cực đại mục tiêu ở bước đó thì sẽ được một dãy các quyết định, tức là được một chiến lược, mà nó làm cực đại hàm mục tiêu chung?

Thực ra vấn đề không đơn giản như vậy. Rõ ràng trong bài toán phát biểu trên, việc chọn quyết định ở mỗi bước đều có ảnh hưởng tới bước khác tiếp sau, vì nó tạo ra một trạng thái nào đó làm điểm xuất phát cho bước tiếp sau. Như vậy khi chọn quyết định ở mỗi bước ta phải dự tính tới hậu quả của nó. Quyết định làm cực đại lợi ích của bước này có thể gây ra ảnh hưởng xấu đến các bước khác mà ta cần tránh. Thí dụ: Giả sử ta cần lập kế hoạch sản xuất cho một hệ thống kinh tế, gồm hai khu vực, khu vực I gồm các xí nghiệp làm ra sản phẩm tiêu dùng, khu vực II làm ra máy móc để cung cấp cho khu vực I. Mục tiêu đặt ra là làm cực đại tổng giá trị sản phẩm tiêu dùng trong thời kỳ kế hoạch T năm, biết rằng tổng số vốn ban đầu là K. Hãy cho biết chiến lược (chính sách) đầu tư tối ưu. Nếu mỗi bước ta xét ở đây là một năm trong thời kỳ kế hoạch thì hỏi rằng quyết định đầu tư vào khu vực trong năm đầu tiên nên như thế nào? Rõ ràng là nếu chỉ nhằm cực đại lợi ích tiêu dùng của bước này thì toàn bộ vốn được đầu tư vào khu vực I. Nhưng theo quan điểm của mục tiêu chung thì rõ ràng quyết định như vậy không phù hợp vì nó không tạo điều kiện để mở rộng quy mô sản xuất của khu vực I và sẽ không mở rộng tiêu dùng trong các năm tiếp sau. Như vậy là ở mỗi bước ta phải chọn một quyết định sao cho quyết định này đảm bảo được sự tiếp tục tối ưu của quá trình ứng với trạng thái đã đạt được tại đầu bước đó. Đây chính là ý cơ bản mà R. Bellman đã phát biểu thành nguyên lý tối ưu sau đây.

1.2. Nguyên lý tối ưu

Chiến lược tối ưu có tính chất là dù cho trạng thái đầu tiên và quyết định tại thời điểm ban đầu thế nào, các quyết định tiếp sau cần phải hợp nên một chiến lược tối ưu đối với trạng thái nhận được do kết quả của quyết định ban đầu.

Dễ dàng có thể chỉ ra được điều khẳng định trên bằng phản chứng (để ý rằng quá trình mà chúng ta nói đây là quá trình không có liên hệ ngược, tức là việc chọn quyết định ở một bước nào đó chỉ ảnh hưởng tới bản thân

bước đó và các bước tiếp sau, chứ không gây ảnh hưởng ngược trở lại, đối với các bước trước).

1.3. Phương trình Bellman và phương pháp quy hoạch động

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày phương pháp quy hoạch động để giải bài toán tối ưu hóa quá trình điều khiển, tức là ta sẽ giải quyết việc chọn quyết định và phối hợp chúng ra sao để thu được chiến lược tối ưu.

Ta sẽ mô tả một cách tổng quát phương pháp này để giải bài toán đã cho.

Do tính chất cộng tính của hàm mục tiêu ta thấy ngay cấu trúc N bước của quá trình. Bây giờ ta xét giai đoạn 1, tức là giai đoạn tìm các quyết định tối ưu giả định trong các bước.

Xét bước N và gọi $V_N(x)$ là trị cực đại của mục tiêu trong bước này ứng với trạng thái $x \in X_N$ ở đầu bước N và với mọi quyết định chấp nhận được, tức là:

$$V_N(x) = \max r_N(x,u_N)$$
$$u_N \in \mathcal{U}(x)$$

Xét bước thứ N - 1 và gọi $V_{N-1}(x)$ là trị cực đại của lợi ích trong cả 2 bước N và N-1 với trạng thái $x \in X_{N-1}$ ở đầu bước N-1 và với quyết định u_{N-1}.

Lúc đó theo nguyên lý tối ưu ta phải viết:

$$V_{N-1}(x) = \max_{u_{N-1}} (r_{N-1}(x,u_{N-1}) + V_N(T_N(x,u_{N-1})))$$

$$u_{N-1} \in \mathcal{U}(x)$$

Trong đó: $T_N(x, u_{N-1}) = x' \in X_N$ mà $V_N(x')$ đã được tính trong bước N.

Biểu thức trên có nghĩa là khi ta chọn một quyết định u_{N-1} thì quyết định này chẳng những làm cực đại lợi ích "riêng" của bước N-1 mà còn nhằm tạo ra một trạng thái x' mà ứng với trạng thái này bước N cũng thu được một lợi ích góp phần làm cho lợi ích chung trong cả hai bước đạt cực đại.

Sau đó ta tiếp tục tính $V_{N-2}(x)$, $V_{N-3}(x)$,....., $V_1(x)$ tương tự như trên. Một cách tổng quát ta có phương trình Bellman:

$$V_k(x) = \max_{u_k} (r_k(x,u_k) + V(T(x,u_k)))$$

II. CÁC BÀI TOÁN DÃY - CÔNG THỨC BENVENISTE - SCHEINKMAN

2.1. Bài toán dãy

Xét bài toán chọn một dãy vô hạn các "điều khiển" $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ làm cực đại chuỗi:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t, u_t), \tag{4.1}$$

thoả mãn $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$, với x_0 cho trước. Ta giả sử chuỗi được xét hội tụ. Đây là bài toán quy hoạch động vô hạn bước.

Đặt $$S(x_t) = \max_{u_t, u_{t+1}, \ldots} [\beta^t r(x_t, u_t) + \beta^{t+1} r(x_{t+1}, u_{t+1}) + \ldots] \tag{4.2}$$

Phương trình Bellman viết là:

$$S(x_t) = \max_{u_t}[\beta^t r(x_t, u_t) + S(x_{t+1})]$$

Nhân hai vế của đẳng thức này với β^{-t} ta được:

$$\beta^{-t} S(x_t) = \max_{u_t}[r(x_t, u_t) + \beta^{-t} S(x_{t+1})]$$

Đặt $V(x_t) = \beta^{-t}S(x_t)$,

$$V(x_t) = \max_{u_t}[r(x_t, u_t) + \beta V(x_{t+1})] \quad \text{(phương trình Bellman)} \tag{4.3}$$

Với t = 0, 1, 2,...

Giả thiết $x_t \in X$, $u_t \in \mathcal{U}$ với mọi t và $S(x_t)$ luôn luôn tồn tại, thì $V(x_t)$ tồn tại và được gọi là hàm giá trị. Khi đó, việc giải bài toán (4.1) có thể đưa về việc giải bài toán:

$$V(x) = \max_{u}[r(x, u) + \beta V(\tilde{x})], \qquad x \in X$$

$$\tilde{x} = g(x, u) \in X,\ u \in \mathcal{U} \tag{4.4}$$

Bằng cách thay $\tilde{x} = g(x, u)$ trong hàm mục tiêu V(x), bài toán có dạng

$$V(x) = \max_{u}[r(x, u) + \beta V(g(x, u))] \tag{4.5}$$

Giả thiết với mỗi x cho trước bài toán có lời giải duy nhất u. Khi đó, ta có hàm u = h(x) gọi là hàm chính sách tối ưu thoả mãn phương trình.

$$V(x) = r(x, h(x)) + \beta V(g(x), h(x)). \tag{4.6}$$

2.2. Công thức Benveniste - Scheinkman

Trong trường hợp các hàm V(x), h(x), r(x, u) là khả vi, bằng cách lấy đạo hàm phương trình (4.6) ta được công thức Benveniste - Scheinkman (1979):

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}[x, h(x))] + \beta \frac{\partial g}{\partial x}[x, h(x))]V'[g(x), h(x))]. \quad (4.7)$$

2.3. Phương trình Euler

Nếu điều khiển u làm cực đại (4.5) nó phải thoả mãn điều kiện cấp 1

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{r(x,u) + \beta V(\tilde{x})\right\} = 0,\ \tilde{x} = g(x,u),$$

Tức là:

$$\frac{\partial}{\partial u} r(x,u) + \beta V'(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u}(x,u) = 0 \quad (4.8)$$

Mặt khác, giả sử x không có mặt trong phương trình chuyển, tức là $\tilde{x} = g(u)$ thì $\frac{\partial g}{\partial x} \equiv 0$, với mọi x; công thức Benveniste - Scheinkman sẽ viết là:

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}[x, h(x)] \text{ với mọi x,}$$

nói riêng:

$$V'(\tilde{x}) = \frac{\partial r(\tilde{x}, u(\tilde{x}))}{\partial \tilde{x}}$$

và thay vào (4.8), ta có:

$$\frac{\partial}{\partial u} r(x,u) + \beta \frac{\partial r}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, u(\tilde{x})) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u}(x,u) = 0$$

Với $x = x_t$, $\tilde{x} = x_{t+1}$, ta viết:

$$\frac{\partial}{\partial u_t} r(x_t, u_t) + \beta \frac{\partial g}{\partial u_t}(u_t) \frac{\partial r}{\partial x_{t+1}}(x_{t+1}, u_{t+1}) = 0 \quad (4.9)$$

Phương trình (4.9) được gọi là phương trình Euler.

Như vậy trong trường hợp $x_{t+1} = g(u_t)$ và giả thiết hàm g đơn trị ta tìm hàm ngược $u_t = g^{-1}(x_{t+1})$ và thay nó vào (4.9) ta sẽ đi đến phương trình sai phân cấp 1 để xác định dãy trạng thái tối ưu.

2.4. Phương pháp giải bài toán dãy

2.4.1. Phương pháp lặp xây dựng hàm giá trị

Phương pháp thứ nhất giải bài toán (4-1) bao gồm việc xây dựng dãy các hàm $V_0(x)$, $V_1(x)$,..., $V_j(x)$, $V_{j+1}(x)$,... bằng phép lặp:

$$V_0(x) = 0$$

$$V_1(x) = \max_u \{r(x, u) + V_0(\tilde{x})\} = \max_u \{r(x, u)\},$$

....

$$V_{j+1}(x) = \max_u \{r(x,u) + \beta V_j(\tilde{x})\},$$

....

thoả mãn $\tilde{x} = g(x,u)$, x cho trước.

Khi dãy $\{V_j(x)\}$ hội tụ, giới hạn của nó sẽ cho ta V(x).

2.4.2. Phương pháp phỏng đoán

Phương pháp thứ hai là đoán dạng hàm V. Bằng việc trực quan và kiểm chứng nó là nghiệm đối với (4.5).

2.4.3. Phương pháp lặp xây dựng hàm chinh sách

Phương pháp này còn được gọi là "Thuật toán Howard" bao gồm các bước sau:

Bước 1. Lấy một chính sách mà trực quan xem là chấp nhận được, $u = h_0(x)$, và tính giá trị:

$$V_{h_j}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, h_j(x_t)),$$

ở đây $\quad x_{t+1} = g(x_t, h_j(x_t))$, với $j = 0$

Bước 2. Xây dựng một chính sách mới $u = h_{j+1}(x)$ bằng cách giải bài toán:

$$\max_u \{r(x, u) + \beta V_{h_j}(g(x,u))$$

với x cho trước bất kỳ.

Bước 3. Lặp lại các bước 1 và 2 để được dãy $\{h_j(x)\}$ hội tụ

Phương pháp lặp hàm chính sách thường hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp hàm giá trị. Dưới đây ta sẽ xem xét một số ứng dụng của các phương pháp nói trên

2.4.4. Một số thí dụ

2.4.4.1. Bài toán tăng trưởng đơn giản

Ta xét quá trình tăng trưởng kinh tế trải qua một dãy vô hạn các thời kỳ $t = 0, 1, 2,..,$ Ở thời kỳ t, đầu vào của quá trình là số tài sản vốn K_t và số lao động L_t, đầu ra của quá trình Q_t bao gồm sản phẩm làm ra trong thời kỳ Y_t và số tài sản vốn còn lại ở cuối thời kỳ $(K_t - D_t)$;

$$Q_t = Y_t + (K_t - D_t),$$

ở đây D_t là số tài sản thực đưa vào sản xuất.

Đầu ra của thời kỳ t, Q_t được dành cho tiêu dùng C_t và phần còn lại được dùng làm vốn sản xuất ở thời kỳ t + 1, K_{t+1}:

$$Q_t = C_t + K_{t+1}$$

Giả thiết mối liên hệ giữa đầu ra và đầu vào của quá trình được miêu tả bởi hàm sản xuất dạng Cobb - Douglas:

$$Q_t = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1,\ A > 0.$$

Từ đó ta có biểu thức

$$C_t + K_{t+1} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Đặt $k_t = K_t/L_t$, $c_t = C_t/L_t$ là vốn và tiêu dùng tính cho một đơn vị lao động.

Ta viết hệ thức trên dưới dạng:

$$c_t + k_{t+1} = A\,k_t^{\alpha}\,.$$

Giả sử lợi ích tiêu dùng ở thời kỳ t dược đo bằng $u_t = \beta^t \ln c_t$, trong đó β^t với $0 < \beta < 1$ là hệ số qui đổi về giá trị tương đương ở thời kỳ t = 0, nó cũng được gọi là hệ số chiết khấu.

Sử dụng phương pháp quy hoạch động giải bài toán tăng trưởng kinh tế sau:

Chọn các dãy $\{c_t\}$ $t = 0, 1, 2,..$ làm cực đại lợi ích tiêu dùng:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

Với các ràng buộc

$$k_{t+1} + c_t = Ak^{\alpha}_t, \tag{4.10}$$

Trong đó, k_0 cho trước, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ là các hằng số.

Để giải bài toán ta xem k_t là biến trạng thái và (4.10) là phương trình chuyển trạng thái.

Đặt hàm giá trị $$V(k_t) = \max_{\{c_t\}} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{t+j} \ln c_{t+j}, \tag{4.11}$$

Phương trình Bellman là:

$$V(k_t) = \max_{c_t} \{\ln c_t + \beta V(k_{t+1})\} \tag{4.12}$$

với $$k_{t+1} + c_t = Ak^{\alpha}_t \tag{4.13}$$

hay:

$$V(k\ ) = \max_{c} \left\{\ln c\ + \beta V(\tilde{k})\right\}, \quad \text{với } \tilde{k} + c = Ak^{\alpha}. \tag{4.14}$$

Trước hết ta giải theo phương pháp lặp hàm giá trị $V_j(k)$ với công thức lặp là:

$$V_{j+1}(k) = \max_{c} \left\{\ln c + \beta V_j(\tilde{k})\right\},\ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

Đặt $V_0(k) = 0$ với mọi $k \geq 0$ ta có

$$V_1(k) = \max_{c, \tilde{k}} \left\{\ln c + \beta V_0(\tilde{k})\right\}.$$

với ràng buộc: $c + \tilde{k} = A k^{\alpha}$

Vì $V_0(\tilde{k}) = 0$ với mọi $\tilde{k} = Ak^{\alpha} - c \geq 0$, ta có $\ln c$ đạt cực đại khi $c^1 = Ak^{\alpha}$. Vậy:

$$V_1(k) = \ln c = \ln A + \alpha \ln k.$$

ta tính tiếp với $j + 1 = 2$:

$$V_2(k) = \max_{c,\tilde{k}}\left\{\ln c + \beta V_1(\tilde{k})\right\}$$

$$= \max_{c,\tilde{k}}\left\{\ln c + \beta[\ln A + \alpha \ln \tilde{k}]\right\}, \qquad (4.16)$$

với ràng buộc: $c + \tilde{k} = Ak^\alpha$

Từ điều kiện bậc nhất của cực trị

Ta được:

$$c^2 = Ak^\alpha/(1 + \alpha\beta) \text{ và } \tilde{k} = \frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha} Ak^\alpha$$

$$V_2(k) = \ln[A/(1 + \alpha\beta)]$$

$$+ \beta\ln A + \alpha\beta\ln[\alpha\beta A/(1 + \alpha\beta)] + \alpha(1 + \alpha\beta)\ln k.$$

Tương tự, với j + 1 = 3, ta có:

$$c^3 = Ak^\alpha/[1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2], \text{ và } \tilde{k} = \frac{\beta\alpha + \beta^2\alpha^2}{1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2} Ak^\alpha$$

Từ đó suy ra ở bước j +1, ta có nghiệm của phương trình lặp là:

$$c^{j+1} = Ak^\alpha/[1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + ... + (\alpha\beta)^j]$$

Vậy khi $j \to \infty$ thì $c^j \to c = Ak^\alpha/(1 - \alpha\beta)^{-1} = (1 - \alpha\beta)Ak^\alpha$. (4.17)

Từ $\tilde{k} + c = Ak^\alpha$ ta được $\tilde{k} = \alpha\beta Ak^\alpha$. (4.18)

Bây giờ ta áp dụng phương pháp phỏng đoán - Ngay từ bước tính lặp ở j + 1 ta có thể phỏng đoán hàm giá trị có dạng V(k) = E + Fln K, trong đó E, F là những hệ số sẽ phải xác định. Phương trình Bellman với dạng hàm này là:

$$E + F\ln k = \max_{c}\left\{\ln c + \beta(E + F\ln \tilde{k})\right\} \qquad (4.19)$$

$$\tilde{k} + c = Ak^\alpha$$

Từ điều kiện bậc nhất đối với cực trị:

$$\frac{d}{dc}\{\ln c + \beta\,[E + F\ln(Ak^\alpha - c)]\} = 0$$

ta có:

$$c = Ak^{\alpha}/(1 + \beta F), \quad \tilde{k} = \frac{\beta FA}{1+\beta F}k^{\alpha}.$$

Thay lời giải này vào phương trình Bellman ta có:

$$E + F\ln k = \ln(Ak^{\alpha})/(1 + \beta F) + \beta[E + F\ln(\beta FAk^{\alpha})/(1 + \beta F)]$$

$$= [\ln A/(1 + \beta F) + \beta F + \beta F\ln(\beta FA)/(1 + \beta F)] + (1 + \beta F)\alpha\ln k.$$

Từ đó ta được hệ phương trình:

$$F = (1 + \beta F)\alpha.$$

$$E = \ln A/(1 + \beta F) + \beta F + \beta F\ln(\beta FA)/(1 + \beta F), \qquad (4.20)$$

và giải ra ta được:

$$F = \alpha/(1 - \alpha\beta)$$

$$E = \frac{1}{1-\beta}\left\{\ln[A(1-\alpha\beta)] + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln(A\alpha\beta)\right\}$$

Vậy: $c = (1 - \alpha\beta)Ak^{\alpha}$, $\tilde{k} = \alpha\beta Ak^{\alpha}$

hay: $c_t = (1 - \alpha\beta)Ak^{\alpha}_t$, $k_{t+1} = \alpha\beta Ak^{\alpha}_t$

Đặt $g = \alpha\beta A$, ta có:

$$k_1 = gk_0^{\alpha}$$

$$k_2 = gk^{\alpha}_1 = g(gk^{\alpha}_0)^{\alpha} = g^{1+\alpha}k_0^{\alpha^2} \qquad (4.21)$$

....

$$k_t = g^{1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{t-1}}k_0^{\alpha^t}$$

Vì $\alpha < 1$, khi $t \to \infty$ thì $\alpha^t \to 0$, $(1 + \alpha + \alpha^2 + ...) \to 1/(1 - \alpha)$,

cho nên: $k_t \to g^{1/(1-\alpha)} = (\alpha\beta A)^{1/(1-\alpha)}$,

$$c_t \to (1 - \alpha\beta)A(\alpha\beta A)^{\alpha/(1-\alpha)}, \qquad (4.22)$$

2.4.4.2. Bài toán quy hoạch động ngẫu nhiên

Bây giờ ta xét dạng ngẫu nhiên của bài toán

Tìm dãy u_0, u_1, .., làm cực đại

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t, u_t), \qquad 0 < \beta < 1, \qquad (4.23)$$

thoả mãn

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1}), \tag{4.24}$$

với x_0 cho trước tại $t = 0$, ở đây ε_t là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập với nhau có cùng hàm phân phối xác suất $p\{\varepsilon_t \le e\} = F(e)$ đối với mọi t; $E_t(y)$ ký hiệu kỳ vọng toán học của biến ngẫu nhiên y, khi đã cho các thông tin được biết tại t. Tại thời kỳ t, x_t được giả định là đã biết, nhưng x_{t+j}, $j \ge 1$ chưa biết tại t. Nghĩa là ε_{t+1} được thực hiện tại (t +1), sau khi u_t đã được quyết định tại t. Bài toán (4.23) - (4.24) là ngẫu nhiên bởi vì biến x_t phụ thuộc biến ngẫu nhiên ε_t.

Bài toán (4.23) - (4.24) vẫn có cấu trúc nhiều thời kỳ và có quy luật chuyển trạng thái từ thời kỳ này sang thời kỳ sau, do đó áp dụng phương pháp quy hoạch động là thích hợp.

Phương trình Bellman đối với bài toán này là:

$$V(x) = \max_u \{r(x,u) + \beta E[V[g(x,u,\varepsilon)] | x]\}, \tag{4.25}$$

ở đây $E[V[g(x,u,\varepsilon)] | x] = \int V[g(x,u,\varepsilon)]dF(\varepsilon)$ và V(x) là giá trị tối ưu của bài toán bắt đầu từ x tại t = 0. Nghiệm V(x) của (4.25) có thể tìm được bằng phép lặp dựa trên phương trình:

$$V_{j+1}(x) = \max_u \{r(x,u) + \beta E[V_j[g(x,u,\varepsilon)] | x] \tag{4.26}$$

bắt đầu từ bất kỳ V_0 (giả thiết liên tục, bị chặn).

Điều kiện cần bậc nhất đối với bài toán ở vế phải của (4.25) là $\frac{\partial}{\partial u}\{r(x,u) + \beta E[V_j(g(x,u,\varepsilon))]x\} = 0$, áp dụng quy tắc lấy đạo hàm kỳ vọng ta có:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(x,u) + \beta E\left[\frac{\partial g}{\partial u}(x,u,\varepsilon)V'(g(x,u,\varepsilon)) \mid x\right] = 0,$$

Giả thiết nghiệm của phương trình này có dạng u = h(x) và làm cực đại (4.25) ta có

$$V(x) = \{r(x, u) + \beta E[V_j(g(x, u, \varepsilon)), x]\}.$$

Giả thiết V(x) khả vi tại mọi x, lấy đạo hàm V(x) theo x ta đi đến phương trình Benveniste - Scheinkman:

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}[x, h(x)] + \beta E\left\{\frac{\partial g}{\partial x}[x, h(x), \varepsilon] V'(g[x, h(x), \varepsilon]) \mid x\right\} \quad (4.27)$$

Trong trường hợp đặc biệt với $\partial g/\partial x \equiv 0$, công thức đối với V'(x) trở thành:

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}[x, h(x)].$$

Thay công thức này vào điều kiện cần cấp một đối với bài toán ta đi đến phương trình Euler ngẫu nhiên:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(x, u) + \beta E\left[\frac{\partial g}{\partial u}(x, u, \varepsilon)\frac{\partial r}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}) \mid x\right] = 0 \quad (4.28)$$

Kết hợp phương trình này với phương trình chuyển trạng thái ta sẽ đi đến phương trình sai phân xác định x_t tối ưu.

III. ỨNG DỤNG CỦA QUY HOẠCH ĐỘNG

3.1. Tăng trưởng tối ưu tổng quát phi ngẫu nhiên

Người tiêu dùng muốn cực đại hoá:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (4.29)$$

thoả mãn $\quad c_t + k_{t+1} = f(k_t)$, $k_0 > 0$ cho trước, $c_t \geq 0$ (4.30)

Bài toán này chỉ khác bài toán trước đã xét trong thí dụ trên là ta xem hàm sản xuất có dạng tổng quát hơn dạng Cobb-Douglas đã cho .

Với U' > 0, U" < 0, f'(0) = +∞ (4.31), f'(∞) = 0, f' > 0 và f" < 0 (4.32). Ở đây c_t là tiêu dùng và k_t là lượng vốn. Đây là một dạng của bài toán được T. C. Koopmans (1963) và David Cass (1965) nghiên cứu.

Giả sử trạng thái được định nghĩa là k_t và điều khiển là k_{t+1}. Thì phương trình Bellman đối với hàm giá trị V(k) là:

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}}\{U[f(k_t) - k_{t+1}] + \beta V(k_{t+1})\} \quad (4.33)$$

Điều kiện cấp một đối với điều khiển tối ưu k_{t+1}là:

$$-U'[f(k_1) - k_{t+1}] + \beta\, V'(k_{t+1}) = 0. \quad (4.34)$$

Kết hợp với phương trình Benveniste và Scheinkman đối với trạng thái k_t ta đi đến:

$$V'(k_t) = U'[f(k_t) - k_{t+1}]f'(k_t), \qquad (4.35)$$

Trong đó k_{t+1} là giá trị tại điểm tối ưu $k_{t+1} = h(k_t)$.

Với giả thiết $U(\cdot)$ và $f(\cdot)$ là lõm chặt, suy ra rằng $V(k)$ là lõm chặt. Từ kết luận này suy ra rằng, hàm chính sách tối ưu, nghiệm $k_{t+1} = h(k_t)$ của (4.34), là hàm không giảm của k_t.

Nếu c_t bằng 0 với mọi t, k_t sẽ chuyển động theo phương trình sai phân $k_{t+1} = f(k_t)$. Vì $f'(0) = +\infty$, $f''(0) < 0$, $f''< 0$ và bởi vì $f'(\infty) = 0$, phương trình $k = f(k)$ có một nghiệm dương duy nhất. Rõ ràng $k_{t+1} = f(k_t)$ hội tụ đến k khi $t \to \infty$.

Giả sử hệ thống bắt đầu với $k_0 \in (0, k]$. Khi đó, đối với $t \geq 1$, k_t rõ ràng phải ở trong khoảng $[0, k]$. Bởi vì hàm chính sách tối ưu $h(k_t) = k_{t+1}$ là không giảm theo k_t, có thể chỉ ra rằng $k_0, k_1, k_2, ...,$ là một dãy đơn điệu, bị chặn. Một mặt, giả sử rằng $k_1 > k_0$. Khi đó, bởi vì $h(.)$ không giảm, ta có $k_2 = h(k_1) \geq h(k_0) = k_1$, $k_3 = h(k_2) \geq h(k_1) = k_2$,.... Mặt khác, giả sử rằng $k_1 < k_0$.. Khi đó, $k_2 = h(k_1) \leq h(k_0) = k_1$, $k_3 = h(k_2) \leq h(k_1) = k_2$, ... Suy ra rằng k_t là dãy đơn điệu, bị chặn. Vì các dãy đơn điệu, bị chặn hội tụ, k_t hội tụ đến một điểm giới hạn $k_\infty(k_0)$ khi $t \to \infty$.

Trong trường hợp cụ thể $U(c) = \ln c$ và $f(k) = Ak^\alpha$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, ta có bài toán tăng trưởng kinh tế Brock-Mirman, ở đây thấy $k_\infty = (\alpha\beta A)^{(1/1-\alpha)}$ (không phụ thuộc k_0).

3.2. Tiêu dùng với tỷ lệ hoàn vốn ngẫu nhiên

Giả sử người tiêu dùng theo đuổi cực đại mục tiêu tiêu dùng, nghĩa là:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \qquad 0 < \beta < 1 \qquad (4.36)$$

thoả mãn $A_{t+1} = R_t(A_t - c_t)$, $t \geq 0$, A_0 cho trước, ở đây $U'(c) > 0$, $U''(c) > 0$, và A_t là tài sản ở đầu kỳ t, c_t là tiêu dùng tại t, và R_t là lãi suất trên tài sản giữa thời kỳ t và (t + 1). Ta giả định rằng R_t đã được biết ở đầu thời kỳ t + 1, sau khi quyết định về tiêu dùng c_t tại t được thực hiện. Giả sử rằng R_t bị chế

ngự bằng quá trình Markov bậc nhất, với xác suất chuyển là $p\{R_t \le R' \mid R_{t-1} = R\} = F(R', R)$. Khi phải chọn các quyết định tại thời gian t, người tiêu dùng biết A_t và $R_{t-1}, R_{t-2}, \ldots$. Để loại trừ sự vay mượn mãi mãi với lãi suất R_t, ta đưa vào đòi hỏi rằng A_t phải thoả mãn:

$$\lim_{t\to\infty} E_0\beta^t A_t = 0.$$

Đối với bài toán này, ta định nghĩa trạng thái là (A_t, R_{t-1}) và điều khiển $\tilde{U}_t$ là $(A_t - c_t)$. Phương trình chuyển tiếp đối với A_t khi đó được cho bởi $A_{t+1} = R_t(A_t - c_t) = R_t\tilde{U}_t$, còn phương trình chuyển tiếp đối với R được định nghĩa không hiển bởi $F(R', R)$. Giả sử $V(A_t, R_{t-1})$ là giá trị của bài toán đối với một người tiêu dùng có tài sản khởi đầu A_t khi tỷ lệ hoàn vốn quan sát được liền trước đó là R_{t-1}. Khi đó phương trình Bellman là:

$$V(A_t, R_{t-1}) = \max_{\tilde{u}_t}\{U(A_t - \tilde{U}_t) + \beta E_t V(\tilde{U}_t R_t, R_t) \qquad (4.37)$$

Điều kiện cần cấp một đối với bài toán ở vế phải là:

$$-U'(c_t) + \beta E_t V_1(\tilde{U}_t R_t, R_t)R_t = 0 \qquad (4.38)$$

Áp dụng công thức Benveniste-Scheinkman để tính giá trị $V_1(A_t, R_{t-1})$ ta được:

$$V_1(A_t, R_{t-1}) = U'(c_t).$$

Sử dụng công thức này trong điều kiện cần cấp một cho ta phương trình Euler:

$$U'(c_t) = \beta E_t U'(c_{t+1})R_t. \qquad (4.39)$$

Lời giải của bài toán tối ưu của chủ sở hữu là một hàm chính sách tiết kiệm

$\tilde{U}_t = h(A_t, R_{t-1})$, nó kéo theo một hàm chính sách tiêu dùng $c_t = c(A_t, R_{t-1}) \equiv A_t - h(A_t, R_{t-1})$. Hàm chính sách này phải thoả mãn phương trình Euler (4.39) và kéo theo điều kiện biên đối với tài sản $\lim_{t\to\infty} E_0\beta^t A_t = 0$ phải thoả mãn. Thế hàm $c(A_t, R_{t-1})$ vào phương trình Euler và sử dụng phương trình chuyển cho ta:

$$U'[c(A_t, R_{t-1})] = \beta E_t U'[c(R_t[A_t - c(A_t, R_{t-1})], R_t)]R_t. \qquad (4.40)$$

Đây là một phương trình xác định hàm chính sách tối ưu $c(A_t, R_{t-1})$.

Để làm một thí dụ cụ thể, cho U(c) bằng ln c và R_t là một quá trình ngẫu nhiên phân phối độc lập và đồng nhất đối với t sao cho $1 \le ER_t < 1/\beta^2$. Ta đoán rằng chính sách tiêu dùng tối ưu có dạng $c_t = \gamma A_t$, ở đây γ là một hằng số phải xác định. Thế phỏng đoán này vào (4.39) ta được:

$$\frac{1}{\gamma A_t} = \beta E \frac{R_t}{\gamma R_t(A_t - \gamma A_t)},$$

trong đó E là toán tử kỳ vọng không điều kiện.

Giải ta được $\gamma = 1 - \beta$. Do đó $c_t = (1 - \beta)A_t$.

Có thể kiểm tra lại rằng chính sách này thoả mãn điều kiện biên mà ta đã quy định đối với tích luỹ tài sản. Vậy hành vi tối ưu tiêu dùng một tỷ lệ hằng số của của cải, $0 < \gamma < 1$, trong số của cải đang có A_t.

Với chính sách tối ưu, tài sản biến động theo $A_{t+1} = R_t(1 - \gamma)A$, Điều này kéo theo $A_t = (1-\gamma)^t \prod_{j=0}^{t-1} R_j A_0, \qquad t \ge 1.$

Do đó, ta có:

$$c_t = \gamma(1-\gamma)^t \prod_{j=0}^{t-1} R_j A_0, \qquad t \ge 1, \qquad c_0 = \gamma A_0.$$

Giá trị tối ưu của $E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$ khi đó được cho bởi:

$$\ln \gamma A_0 + E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left[\gamma(1-\gamma)^t \prod_{j=0}^{t-1} R_j A_0\right].$$

Bởi vì R_j có phân phối độc lập và đồng nhất, tính giá trị biểu thức này ta được:

$$V(A_0, R_{-1}) = \frac{1}{1-\beta}\ln\gamma + \ln(1-\gamma)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t t + \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t t E\ln R + \frac{1}{1-\beta}\ln A_0,$$

ở đây, E ln R là kỳ vọng của ln R_t đối với mọi t. Ta có, $\sum_{t=0}^{\infty} t\beta^t = \beta/(1-\beta)^2$. Do đó, hàm giá trị có thể viết:

$$V(A_0, R_{-1}) = \frac{1}{1-\beta}\ln\gamma + \ln(1-\gamma)\frac{\beta}{(1-\beta)^2} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}E\ln R + \frac{1}{1-\beta}\ln A_0.$$

Như vậy, giá trị cực đại của hàm mục tiêu này phụ thuộc trực tiếp vào trung bình của lô ga của lãi suất Eln R, mà không phụ thuộc tỷ lệ hoàn vốn

$$U'(A_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it}) = \beta E_t R_{it} V_1\left(\sum_{k=1}^{n} s_{kt} R_{kt}, R_t\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$ Áp dụng công thức Benveniste-Scheinkman ta được $V_1 = U'(A_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it})$. Thay nó vào các điều kiện cấp một ở trên cho ta:

$$U'(A_t - \sum_{i=1}^{n} s_{it}) = \beta E_t R_{it} U'\left(\sum_{k=1}^{n} s_{kt} R_{kt} - \sum_{j=1}^{n} s_{jt+1}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ta sẽ tìm hàm chính sách tối ưu $s_{it} = s_i(A_t, R_{t-1})$. Thay chúng vào phương trình Euler trên đây ta có:

$$U'\left[A_t - \sum_{i=1}^{n} s_i(A_t, R_{t-1})\right] =$$

$$= \beta E_t R_{it} U'\left\{\sum_{k=1}^{n} R_{kt} s_k(A_t, R_{t-1}) - \sum_{j=1}^{n} s_j\left[\sum_{k=1}^{n} R_{kt} s_k(A_t, R_{t-1}), R_t\right]\right\}, \quad (4.41)$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Đây là một tập hợp n phương trình xác định n hàm chưa biết $s_i(A_t, R_{t-1})$, i = 1, . . . , n. Giải ra ta sẽ được nghiệm.

Xét trường hợp đặc biệt, trong đó R_{it}, i = 1,... n, có phân phối độc lập và đồng nhất cả theo thời gian lẫn theo i. Thêm nữa, ta giả sử rằng $U(c) = [1/(1 - \alpha)]c^{1-\alpha}$; ở đây $0 < \alpha < 1$, nên $U'(c) = c^{-\alpha}$. Ở trường hợp này ta phỏng đoán rằng $s_{it} = kA_t$, i = 1, ..., n, trong đó k là hằng số cần xác định. Phỏng đoán k là hằng số độc lập với i là theo trực quan nảy ra từ giả thiết về tính độc lập và đồng nhất của phân phối của R_{it} theo thời gian và theo i. Ta có:

$$k^{\alpha} = \beta E_t \frac{R_{it}}{\left(\sum_{j=1}^{n} R_{jt}\right)^{\alpha}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Bởi vì R_{it} có phân phối độc lập và đồng nhất, phương trình trên có thể đúng đối với mọi i = 1, ..., n. Kết quả này xác nhận điều phỏng đoán của chúng ta và cho một phương trình có thể giải đối với k.

Trong thí dụ hiện tại lời giải $s_{it} = kA_t$ có nghĩa là, hộ gia đình có thể phân bố cùng một tỷ lệ không đổi k cho mỗi thứ tài sản trong mỗi thời kỳ.

Kết quả này phụ thuộc vào tính độc lập và đồng nhất của R_{it} theo t. Bây giờ ta nghiên cứu những hậu quả của việc nới lỏng giả thiết về phân phối đồng nhất qua i trong khi giữ lại tính độc lập qua thời gian và tài sản. Với các giả thiết mới này ta phỏng đoán rằng các chính sách tối ưu có dạng $s_{it} = k_i A_t$. Thế phỏng đoán này vào phương trình Euler ta có:

$$U'\left[A_t\left(1-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\right] = \beta E_t R_{it} U'\left[\sum_{h=1}^{n}k_h R_{ht} A_t\left(1-\sum_{j=1}^{n}k_j\right)\right],$$

$i = 1, \ldots, n.$

Giả thiết U(c) = ln c. Thay $U'(c) = c^{-1}$ vào các phương trình trên và sắp xếp lại ta được:

$$1 = \beta E_t \frac{R_{it}}{\left(\sum_{j=1}^{n}k_j R_{jt}\right)^{\alpha}}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Đây là hệ n phương trình n ẩn $k_1, \ldots, k_n$. Chẳng hạn n = 2, ta có hai phương trình:

$$1 = \beta E_t[k_1 + (k_2 R_{2t} / R_{1t})]^{-1}$$
$$1 = \beta E_t[k_1 R_{1t} / R_{2t}) + k_2]^{-1} \; ,$$

và chúng có thể giải đối với k_1 và k_2.

PHỤ LỤC A

KIỂM ĐỊNH TÍNH NỬA XÁC ĐỊNH CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Phần phụ lục này trình bày trực tiếp cho phần C của chương II (Phép tính biến phân và ứng dụng trong kinh tế). Sau đây chúng ta hãy xét kiểm định về sự xác định dấu của dạng toàn phương.

1. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Trong chương II , mục C chúng ta đã đi đến dạng toàn phương của hai biến sau:

$$q = F_{yy}dy^2 + 2F_{yy'}dydy' + F_{y'y'}dy'^2 \quad \text{(A1)}$$

2. KIỂM ĐỊNH BẰNG ĐỊNH THỨC ĐỐI VỚI TÍNH XÁC ĐỊNH DẤU

Kiểm định bằng định thức đối với tính xác định dấu của dạng toàn phương là cách dễ nhất. Đầu tiên chúng ta viết định thức của q như sau:

$$|D| \equiv \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'y} \\ F_{yy'} & F_{yy} \end{vmatrix} \quad \text{(A2)}$$

và sau đó xác định hai định thức con chính sau đây:

$$|D_1| \equiv |F_{y'y'}| = F_{y'y'} \qquad \text{và} \qquad |D_2| \equiv \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'y} \\ F_{yy'} & F_{yy} \end{vmatrix} \quad \text{(A3)}$$

Quy tắc kiểm định là như sau:

$$\text{q xác định âm} \Leftrightarrow |D_1| < 0,\ |D_2| > 0 \quad \text{(A4)}$$

$$\text{q xác định dương} \Leftrightarrow |D_1| > 0,\ |D_2| > 0$$

(với mọi điểm trong miền đang xét)

Mặc dù dễ sử dụng, nhưng phép kiểm định này có thể là quá chặt chẽ. Nó dành cho tính lõm / lồi ngặt, trong khi điều kiện đủ, đơn thuần chỉ quy định tính lõm / lồi yếu.

3. KIỂM ĐỊNH BẰNG ĐỊNH THỨC ĐỐI VỚI TÍNH NỬA XÁC ĐỊNH DẤU

Để kiểm định định thức đối với tính nửa xác định dấu của q, ta phải kiểm tra nhiều định thức hơn, bởi vì với kiểm định này, chúng ta phải xem xét tất cả các dãy có thứ tự có thể có của các biến của dạng toàn phương. Với trường hợp hai biến đang xét, có hai dãy có thứ tự có thể có của hai biến - (y',y) và (y,y'). Vì vậy, chúng ta chỉ cần xem xét thêm một biệt thức ngoài (A2), đó là:

$$\left|D^0\right| \equiv \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yy'} \\ F_{y'y} & F_{y'y'} \end{vmatrix} \tag{A5}$$

các định thức con chính của nó là:

$$\left|D^0{}_1\right| \equiv \left|F_{yy}\right| = F_{yy} \qquad \text{và} \qquad \left|D^0{}_2\right| \equiv \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yy'} \\ F_{y'y} & F_{y'y'} \end{vmatrix} \tag{A6}$$

Để thuận tiện, chúng ta ký hiệu các định thức con chính cấp 1x1 của (A2) và (A1) tương ứng là $|D_1|$ và $|D^0{}_1|$, viết gộp lại thành $|\widetilde{D}_1|$, nghĩa là $|\widetilde{D}_1| = \{|D_1|, |D^0{}_1|\}$ và các định thức con chính 2x2 là $|D_2|$ và $|D^0{}_2|$, viết gộp lại thành $|\widetilde{D}_2|$. Thêm nữa, chúng ta dùng ký hiệu $|\widetilde{D}_i| \geq 0$ để chỉ là các phần tử của $|\widetilde{D}_i|$ không bé hơn không. Khi đó quy tắc kiểm định tính nửa xác định dấu như sau:

$$\text{q nửa xác định âm} \quad \Leftrightarrow \quad |\widetilde{D}_1| \leq 0,\ |\widetilde{D}_2| \geq 0 \tag{A7}$$

$$\text{q nửa xác định dương} \quad \Leftrightarrow \quad |\widetilde{D}_1| \geq 0,\ |\widetilde{D}_2| \geq 0$$

(với mọi điểm trong miền đang xét)

4. KIỂM ĐỊNH BẰNG NGHIỆM ĐẶC TRƯNG

Một cách khác với sử dụng định thức là áp dụng quy tắc kiểm định nghiệm đặc trưng, mà quy tắc này cùng một lúc có thể cho thấy tính nửa xác định dấu cũng như tính xác định dấu. Để sử dụng kiểm định này, trước hết ta viết phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} F_{y'y'} - r & F_{y'y} \\ F_{yy'} & F_{yy} - r \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{[từ (A2)]} \tag{A8}$$

Sau đó giải để tìm các nghiệm riêng r_1 và r_2. Quy tắc kiểm định dựa vào dấu của các nghiệm này như sau:

q xác định âm $\Leftrightarrow$ $r_1 < 0, r_2 < 0$

q xác định dương $\Leftrightarrow$ $r_1 > 0, r_2 > 0$

q nửa xác định âm $\Leftrightarrow$ $r_1 \leq 0, r_2 \leq 0$

(ít nhất một nghiệm = 0)

q nửa xác định dương $\Leftrightarrow$ $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$

(ít nhất một nghiệm = 0) (A9)

Đối với kiểm định này, cần nhớ rằng hai nghiệm tìm được gắn với định thức $|D_2|$ ở (A3) thông qua hai sự liên hệ sau:

$$r_1 + r_2 = \text{tổng của các phần tử trên đường chéo chính} = F_{y'y'} + F_{yy} \tag{A10}$$

$$r_1 r_2 = |D_2| \tag{A11}$$

Trước hết, hai quan hệ này cung cấp một phương tiện kiểm tra kép đối với tính toán r_1 và r_2. Quan trọng hơn, chúng cho phép ta suy ra rằng, nếu $|D_2| < 0$, thì r_1 và r_2 phải trái dấu nhau, vì thế q không có dấu xác định rõ ràng. Bởi vậy, một khi $|D_2|$ được biết là âm, ta không cần phải qua các bước (A8) và (A9).

Thí dụ 1: Xét bài toán khoảng cách ngắn nhất sau đây:

Tìm cực trị của phiếm hàm

$$V[y] = \int (1 + y'^2)^{1/2}\, dt$$

với các điều kiện biên y(0) = A và y(T) cho trước.

Bài toán tìm cực trị của phiếm hàm này là bài toán tìm đường đi với khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm này.

Hàm dưới dấu tích phân $\mathbf{F} = (1 + y'^2)^{1/2}$ chỉ phụ thuộc riêng y'.

Do đó ta có thể kết luận ngay rằng cực trị là đường thẳng. Với $\mathbf{F_y} = 0$, phương trình Euler đơn giản là $dF_{y'}/dt = 0$, và nghiệm của nó là $\mathbf{F_{y'}} =$

constant. Từ sự kiện $F_{y'} = y'/(1 + y'^2)^{1/2}$, ta có thể viết (sau khi lấy bình phương):

$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=c^2$$

Nhân cả hai vế với $(1 + y'^2)$, sắp xếp lại và lấy thừa số chung y', ta có thể biểu diễn y' qua c như sau: $y'^2 = c^2/1\text{-}c^2$. Tương đương với

$$y'=\frac{c}{\left(1-c^2\right)^{1/2}} = \text{constant}$$

Vì độ dốc của y(t), y'(t) là hằng số, cực trị mong muốn y*(t) phải là đường thẳng.

Để xét đó là cực đại hay cực tiểu hoặc không phải cực trị ta hãy kiểm tra điều kiện cấp hai. Để làm việc đó, chú ý rằng căn bậc hai trong biểu thức F là một căn bậc hai dương bởi vì nó biểu diễn khoảng cách, mà khoảng cách thì không thể âm. Điểm này quan trọng khi chúng ta xác định giá trị đạo hàm cấp hai:

$$\begin{aligned} F_{y'y'} &= -(1+y'^2)^{-3/2}y'^2+(1+y'^2)^{-1/2} \\ &= (1+y'^2)^{-3/2}[-y'^2+(1+y'^2)] \\ &= (1+y'^2)^{-3/2} > 0 \quad \text{(căn bậc hai dương)} \end{aligned}$$

$F_{y'y'}$ - dương với mọi giá trị y' và với mọi t - có nghĩa là F lồi ngặt khắp mọi nơi chỉ đối với biến y'. Như vậy, chúng ta có thể kết luận rằng cực trị tìm được từ phương trình Euler cho một khoảng cách nhỏ nhất duy nhất giữa hai điểm cho trước.

Thí dụ 2: Phương trình Euler có phải là điều kiện đủ cho sự cực đại hay cực tiểu nếu hàm lấy tích phân của phiếm hàm mục tiêu là $F(t,y,y') = 4y^2 + 4yy' + y'^2$?

Để kiểm tra tính lõm/lồi của F, trước hết ta tìm đạo hàm cấp hai của F. Vì:

$$F_y = 8y + 4y' \qquad \text{và} \qquad F_{y'} = 4y + 2y'$$

nên các đạo hàm cấp hai cần tìm là:

$$F_{y'y'} = 2 \qquad F_{y'y} = F_{yy'} = 4 \qquad F_{yy} = 8$$

Như vậy, theo (A3), ta có:

$$|D_1| = 2 \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Dạng toàn phương q không xác định dương.

Tuy nhiên, theo (A6), ta thấy rằng

$$|D^0{}_1| = 8 \qquad |D^0{}_2| = 0$$

Nên điều kiện đối với tính nửa xác định dương ở (A7) được thoả mãn.

Để minh hoạ quy tắc kiểm định bằng nghiệm đặc trưng, trước hết ta viết phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} 2-r & 4 \\ 4 & 8-r \end{vmatrix} = r^2 - 10r = 0$$

Hai nghiệm của phương trình này là $r_1 = 10$ và $r_2 = 0$. Vì các nghiệm này là không âm vô điều kiện, nên q nửa xác định dương khắp mọi nơi theo (A9). Điều này kéo theo rằng hàm F là lồi, và phương trình Euler quả thực là điều kiện đủ đối với cực tiểu V[y].

Thí dụ 3: Bây giờ chúng ta hãy kiểm tra xem phương trình Euler có phải là đủ đối với cực đại hoá lợi nhuận trong bài toán độc quyền động đã xét hay không. Hàm lợi nhuận của nó cho ta các đạo hàm cấp hai

$$\pi_{p'p'} = -2\alpha h^2, \quad \pi_{p'p} = \pi_{pp'} = h(1+2\alpha b), \quad \pi_{pp} = -2b(1+\alpha b)$$

Bằng cách sử dụng quy tắc kiểm định theo định thức (A4), chúng ta thấy rằng mặc dù $|D_1|$ (ở đây là $\pi_{p'p'}$) âm như yêu cầu đối với tính xác định âm của q, $|D_2|$ cũng âm:

$$\begin{vmatrix} \pi_{p'p'} & \pi_{p'p} \\ \pi_{pp'} & \pi_{pp} \end{vmatrix} = 4\alpha b h^2(1+\alpha b) - [h(1+2\alpha b)]^2 = -h^2$$

Do đó, theo (A11), các nghiệm đặc trưng r_1 và r_2 trái dấu nhau. Như vậy, hàm F không lõm, và phương trình Euler không phải là điều kiện đủ đối với sự cực đại hoá lợi nhuận.

Tuy nhiên, bài toán này không thoả mãn một điều kiện cần cấp 2 đối với một cực đại.

5. MỞ RỘNG CHO CÁC BÀI TOÁN VỚI n BIẾN

Với bài toán n biến trạng thái, những điều kiện đủ với tính lõm và tính lồi vẫn có thể áp dụng được. Nhưng trong trường hợp đó, hàm F phải là lõm /lồi (như trường hợp đang xét) đồng thời theo tất cả n biến và các đạo hàm của chúng ($y_1,\ldots, y_n, y_1',\ldots, y_n'$). Đối với quy tắc kiểm định bằng nghiệm đặc trưng, điều này có nghĩa là phải giải một phương trình đại số bậc cao hơn. Tuy nhiên, một khi đã tìm được các nghiệm, chúng ta chỉ cần bắt tất cả chúng thoả mãn ràng buộc dấu như ở (A9). Trong quy tắc kiểm định bằng định thức đối với sự xác định dấu, có thể sẽ phải kiểm tra một định thức lớn hơn với nhiều định thức con chính hơn.

Về vấn đề kiểm định bằng định thức đối với tính nửa xác định dấu, thủ tục cho trường hợp n biến sẽ trở nên phức tạp hơn. Điều này là vì số định thức con chính sinh ra bởi các dãy có thứ tự khác nhau của các biến sẽ nhân lên rất nhanh. Ngay cả chỉ với hai biến trạng thái, thí dụ như (y,z), tính lõm /lồi bây giờ phải được kiểm tra với bốn biến (y,z,y',z'). Để đơn giản ký hiệu, chúng ta hãy đánh số bốn biến này tương ứng là thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư. Sau đó chúng ta có thể sắp xếp các đạo hàm cấp hai của F vào biệt thức 4x4 như sau:

$$|D| \equiv \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & F_{yy'} & F_{yz'} \\ F_{zy} & F_{zz} & F_{zy'} & F_{zz'} \\ F_{y'y} & F_{y'z} & F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y} & F_{z'z} & F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} \qquad \text{(A12)}$$

Vì mỗi biến đều có thể được lấy như là biến thứ nhất trong một dãy có thứ tự khác, nên ở đây tồn tại bốn định thức con chính cấp 1x1 có thể có:

$$F_{yy} \quad F_{zz} \quad F_{y'y'} \quad F_{z'z'} \qquad \text{(A13)}$$

Chúng ta sẽ biểu diễn các định thức con chính này chung lại thành $|\tilde{D}_1|$.

Số định thức con chính cấp 2x2 có thể có là 12, nhưng trong chúng chỉ có 6 giá trị phân biệt. Các giá trị này có thể tính được từ sáu định thức con chính sau đây:

$$\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yy'} \\ F_{y'y} & F_{y'y'} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz'} \\ F_{z'y} & F_{z'z'} \end{vmatrix} \tag{A14}$$

$$\begin{vmatrix} F_{zz} & F_{zy'} \\ F_{y'z} & F_{y'y'} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} F_{zz} & F_{zz'} \\ F_{z'z} & F_{z'z'} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix}$$

Lý do sáu định thức con chính còn lại bị bỏ qua là định thức con chính với (f_{ii},f_{jj}) nằm trên đường chéo chính có giá trị không đổi khi đảo trật tự hai biến trên đường chéo chính, (f_{jj}, f_{ii}). Các định thức con chính cấp 2x2 ở (A14) sẽ được gọi chung lại là $|\tilde{D}_2|$

Về phần các định thức con chính cấp 3x3, chỉ có bốn giá trị phân biệt có thể xuất hiện, và chúng có thể tính được từ các định thức con chính sau đây:

$$\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & F_{yy'} \\ F_{zy} & F_{zz} & F_{zy'} \\ F_{y'y} & F_{y'z} & F_{y'y'} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & F_{yz'} \\ F_{zy} & F_{zz} & F_{zz'} \\ F_{z'y} & F_{z'z} & F_{z'z'} \end{vmatrix} \tag{A15}$$

$$\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yy'} & F_{yz'} \\ F_{y'y} & F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y} & F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} F_{zz} & F_{zy'} & F_{zz'} \\ F_{y'z} & F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'z} & F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix}$$

Chúng ta có thể bỏ qua các định thức còn lại vì định thức con chính với (f_{ii},f_{jj}, f_{kk}) nằm trên đường chéo chính luôn có giá trị như nhau khi đảo trật tự sắp xếp trên đường chéo chính. Chúng ta sẽ gọi chung các định thức con chính ở (A15) là $|\tilde{D}_3|$.

Cuối cùng, chúng ta cần xem chỉ một định thức con chính cấp 4x4, $|\tilde{D}_4|$, có cùng giá trị như $|D|$ ở (A12).

Một câu hỏi nảy sinh tự nhiên là: Làm sao chắc chắn được số giá trị phân biệt có thể sinh ra từ các định thức con chính với các thứ nguyên khác

nhau? Câu trả lời là chúng ta có thể chỉ cần sử dụng công thức đối với số tổ hợp chập r của n phần tử, ký hiệu là C_r^n:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{A16}$$

Với (A13), ta chọn lấy một trong bốn biến; như vậy số tổ hợp là

$$C_1^4 = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

Với các định thức con chính cấp 2x2, ta có

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Và với các định thức con chính cấp 3x3, công thức này cho

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Cuối cùng, với các định thức con chính cấp 4x4, chỉ tồn tại một giá trị duy nhất, vì

$$C_4^4 = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

Khi đã tính được tất cả các định thức con chính, quy tắc kiểm định đối với tính nửa xác định dấu tương tự như (A7). Sử dụng kí hiệu $|\tilde{D}_i| \geq 0$ có nghĩa rằng từng phần tử của $|\tilde{D}_i|$ đều không nhỏ thua không, ta có:

$$\text{q nửa xác định âm} \iff |\tilde{D}_1| \leq 0,\ |\tilde{D}_2| \geq 0,\ |\tilde{D}_3| \leq 0,\ |\tilde{D}_4| \geq 0$$

$$\text{q nửa xác định dương} \iff |\tilde{D}_1| \geq 0,\ |\tilde{D}_2| \geq 0,\ |\tilde{D}_3| \geq 0,\ |\tilde{D}_4| \geq 0$$

(với mọi điểm trong miền đang xét)

PHỤ LỤC B

TỐI ƯU TĨNH

1. HÀM LỒI VÀ LÕM

1.1. Hàm lồi

Một hàm số f xác định trên tập lồi X được gọi là hàm lồi trên X, nếu với mọi $x,y \in X$, $0 \le \lambda \le 1$ ta có:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Hàm f được gọi là lồi ngặt nếu:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x,y \in X, \quad 0 < \lambda < 1.$$

1.2. Hàm lõm

Hàm f được gọi là lõm (lõm ngặt) nếu -f là lồi (lồi ngặt).

1.3. Hàm tựa lồi

Hàm f được gọi là tựa lồi trên X, nếu với mọi $\lambda \in R$ tập mức

$$\{x \in X: f(x) \le \lambda\} \text{ là một tập lồi.}$$

1.4. Hàm tựa lõm

Hàm f được gọi là tựa lõm nếu -f tựa lồi.

1.5. Tính chất của các hàm lồi

1.5.1. Định lý 1

Cho f là một hàm lồi trên tập lồi X và g là hàm lồi trên tập lồi Y. Lúc đó các hàm sau là lồi trên $X \cap Y$

(i) $\lambda f + \beta g$; $\forall \lambda, \beta \ge 0$,

(ii) $\max(f,g)$.

PHỤ LỤC B

TỐI ƯU TĨNH

1. HÀM LỒI VÀ LÕM

1.1. Hàm lồi

Một hàm số f xác định trên tập lồi X được gọi là hàm lồi trên X, nếu với mọi $x, y \in X$, $0 \le \lambda \le 1$ ta có:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Hàm f được gọi là lồi ngặt nếu:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in X, \quad 0 < \lambda < 1.$$

1.2. Hàm lõm

Hàm f được gọi là lõm (lõm ngặt) nếu -f là lồi (lồi ngặt).

1.3. Hàm tựa lồi

Hàm f được gọi là tựa lồi trên X, nếu với mọi $\lambda \in R$ tập mức

$$\{x \in X: f(x) \le \lambda\} \text{ là một tập lồi.}$$

1.4. Hàm tựa lõm

Hàm f được gọi là tựa lõm nếu -f tựa lồi.

1.5. Tính chất của các hàm lồi

1.5.1. Định lý 1

Cho f là một hàm lồi trên tập lồi X và g là hàm lồi trên tập lồi Y. Lúc đó các hàm sau là lồi trên $X \cap Y$

(i) $\lambda f + \beta g$; $\forall \lambda, \beta \ge 0$,

(ii) $\max(f,g)$.

Chú ý rằng định lý này, nói chung không đúng cho hàm tựa lồi. Một hàm lồi có thể không liên tục tại một điểm trên biên miền xác định của nó. Tuy nhiên nó liên tục tại mọi điểm trong của tập đó theo định lý sau:

1.5.2. Định lý 2

Một hàm lồi xác định trên tập lồi X thì liên tục tại mọi điểm trong của X.

Tính chất sau đây đặc trưng cho một hàm lồi khả vi, và rất bổ ích để kiểm tra tính lồi của một hàm số. Ký hiệu $\nabla f(a)$ là gradient của f tại a.

1.5.3. Định lý 3

Cho $f: X \to R$ là một hàm lồi khả vi trên tập lồi mở X. Điều kiện cần và đủ để f lồi trên X là:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) : \text{với mọi } x, y \in X.$$

Nếu f khả vi hai lần thì điều kiện cần và đủ để f lồi trên X là với mọi $x \in X$ ma trận Hess $H(x)$ của f tại x xác định không âm. Tức là:

$$y^T H(x) y \geq 0 \ \forall x \in X,\ y \in R^n.$$

Như vậy một dạng toàn phương $x^T Q x$ là một hàm lồi khi và chỉ khi Q xác định không âm. Dễ thấy rằng một dạng toàn phương là một hàm lồi ngặt khi và chỉ khi ma trận của nó xác định dương.

Tính khả vi của một hàm lồi giữ vai trò quan trọng trong các phương pháp tối ưu hoá.

1.5.4. Định lý 4

Định nghĩa: Đạo hàm theo hướng

Ta gọi đạo hàm theo hướng d của một hàm số f tại điểm x - ký hiệu $\delta f(x,d)$ là

$$\delta f(x,d) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Nếu f là một hàm lồi trên tập lồi X thì với mọi $x \in X$ và mọi d sao cho:

$x + d \in X$, đạo hàm theo hướng d của f tại x luôn luôn tồn tại và nghiệm đúng:

$$\delta f(x, d) \le f(x + d) - f(x).$$

Ngoài ra với mỗi x cố định, $\delta f(x,.)$ là một hàm lồi trên tập lồi $\{d: x + d \in X\}$.

Từ định lý này có thể suy ra rằng nếu f khả vi thì:

$$\delta f(x,d) = \langle \nabla f(x),d \rangle \quad \forall d.$$

trong đó $\langle \nabla f(x),d \rangle$ là tích vô hướng của 2 véc tơ $\nabla f(x)$ và d.

2. TÍNH CHẤT CỰC TRỊ

Cho $D \subset R^n$ khác trống và $f : D \rightarrow R$

2.1. Định nghĩa Cực tiểu địa phương và Cực tiểu tuyệt đối

Một điểm $x^* \in D$ được gọi là ***cực tiểu địa phương*** của f trên D, nếu tồn tại một lân cận mở U của x^* sao cho $f(x^*) \le f(x)$ với mọi $x \in D \cap U$. Điểm x^* được gọi là ***cực tiểu tuyệt đối*** của f trên D nếu $f(x^*) \le f(x)$ với mọi $x \in D$

Dưới đây là tính chất cơ bản về cực trị của một hàm lồi.

2.2. Định lý 5

Mọi điểm cực tiểu địa phương của một hàm lồi trên một tập lồi đều là điểm cực tiểu tuyệt đối.

3. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

3.1. Bài toán quy hoạch lồi tổng quát

Xét bài toán quy hoạch lồi tổng quát sau:

$$f(x) \rightarrow \min \tag{B1}$$

$$x \in D \tag{B2}$$

trong đó f(x) là hàm số xác định trên tập hợp nào đó chứa D ; D là tập đóng trong R^n.

3.2. Điều kiện tối ưu

Một vấn đề quan trọng trong khi nghiên cứu các bài toán tối ưu là việc tìm kiếm những điều kiện tối ưu. Những điều kiện tối ưu cho phép hiểu biết được các tính chất của lời giải, từ đó có thể xây dựng các phương pháp giải.

3.2.1. Định nghĩa Hướng chấp nhận được

Một véc tơ $d \neq 0$ được gọi là hướng chấp nhận được của tập D tại điểm $x^* \in D$, nếu tồn tại số thực $\lambda_0 > 0$ sao cho $x^* + \lambda d \in D$ với mọi $0 \leq \lambda < \lambda_0$. Về mặt hình học, có nghĩa là: xuất phát từ x^* đi theo hướng d có ít nhất một đoạn ở trong miền chấp nhận. Ký hiệu tập hợp các hướng chấp nhận được của D, tại x^* là $D(x^*)$, và $\overline{D}(x^*)$ là bao đóng của nó.

3.2.2. Định lý 6

Giả sử f khả vi trong một tập mở chứa D. Nếu x^* là cực tiểu địa phương của f trên D thì:

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0 \text{ với mọi } d \in \overline{D}(x^*).$$

3.2.3. Định lý 7

Giả sử D là một tập lồi, f là một hàm lồi, khả vi trên một tập mở chứa D. Lúc đó điều kiện cần và đủ cho $x^* \in D$ làm cực tiểu f trên D là x^* là điểm dừng của f trên D.

Trong các bài toán qui hoạch, miền ràng buộc D thường được coi như là tập các điểm x thoả mãn hệ bất phương trình và phương trình sau :

$$g_j(x) \leq 0, \ (j = 1, \ldots, m)$$

$$h_i(x) = 0, \ (i = 1, \ldots, k), \qquad \text{(B3)}$$

Trong đó mỗi g_j, h_i là các hàm số thực xác định trong một tập mở chứa D. Các hàm này được gọi là các ràng buộc của bài toán (1-2). Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu g_j ($j = 1, \ldots, m$) là các hàm lồi liên tục và h_i ($i = 1, \ldots, k$) là các hàm afin thì D sẽ là một tập lồi đóng.

Một công cụ hữu ích được sử dụng rộng rãi khi nghiên cứu các điều kiện tối ưu là hàm Lagrange. Đối với bài toán (1-2), khi D được cho bởi (B3), hàm Lagrange được định nghĩa như sau;

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i h_i(x).$$

Sử dụng hàm Lagrange, ta thu được điều kiện cần (và đủ nếu bài toán là một qui hoạch lồi) của tối ưu.

3.2.4. Định nghĩa Điều kiện chính quy

Cho x^0 là một điểm chấp nhận (thoả mãn (B3)). Giả sử các hàm số trong (B3) khả vi. Ký hiệu $S(x^0)$ là tập hợp các véc tơ d thoả mãn hệ tuyến tính sau đây:

$$\langle \nabla h_j(x^0), d\rangle = 0, j = 1,..., k, \tag{B4}$$

$$\langle \nabla g_i(x^0), d\rangle \le 0, i \in X(x^0) \tag{B5}$$

Trong đó $X(x^0)$ là tập hợp các chỉ số tại đó x^0 thoả mãn ngặt các bất đẳng thức $g_j(x) \le 0$, $j = 1,..., m$; tức là $g_j(x^0) = 0$ khi $j \in X(x^0)$.

Cho $x^0 \in D$ (D cho bởi (B3)). Ta nói rằng *điều kiện chính qui* được thoả mãn tại x^0 nếu $\overline{D}(x^0) = S(x^0)$.

3.2.5. Bổ đề

Với mọi $x^0 \in D$ có $\overline{D}(x^0) \subset S(x^0)$.

Định lý 8. (Định lý Kuhn-Tucker)

Giả sử các hàm f, g_j, h_i, với mọi i và j khả vi liên tục trên một tập mở chứa D. Cho x* là một cực tiểu địa phương của bài toán (1-2) và tại đó điều kiện chính qui được thoả mãn. Lúc đó tồn tại các véctơ $\lambda^* = (\lambda_1^*,..., \lambda_m^*) \ge 0$, $\mu^* = (\mu_1^*,..., \mu_k^*)$ sao cho

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \tag{B6}$$

$$\mathop{}_{j=1}^{m} \lambda_j^* \, g_j(x^*) = 0 \;\forall\, j = 1,...,m \tag{B7}$$

Nếu (1-2) là một qui hoạch lồi; tức là f, g_j, (j =1,..., m) là các hàm lồi và h_i(i = 1,..., k) là các hàm afin, thì (B6), (B7) cũng là điều kiện đủ để $x^* \in D$ là lời giải của bài toán (1-2).

4. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Ý tưởng của đối ngẫu là: với mỗi bài toán tối ưu đang được xét (gọi là bài toán gốc), xây dựng một bài toán tối ưu khác (gọi là bài toán đối ngẫu) sao cho giữa các bài toán này có mối liên quan chặt chẽ (theo một nghĩa nào đó, thí dụ từ nghiệm của bài này có thể suy ra nghiệm của bài kia v...v).

Cho đến nay người ta đã xây dựng được nhiều loại đối ngẫu.Tuy nhiên đối ngẫu Lagrange là cơ bản nhất và được sử dụng rộng rãi hơn cả. Để đơn giản và dễ thấy rõ ý tưởng của lý thuyết đối ngẫu, ta xét bài toán sau:

$$\min f(x) \qquad \text{(I)}$$

với các ràng buộc:

$$x \in X,\ g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots, m.$$

Từ bài toán này, người ta xây dựng một bài toán tối ưu khác có dạng:

$$\max \tilde{f}(y) \qquad \text{(II)}$$

với các ràng buộc:

$$y \in Y.$$

Ta nói (II) là bài toán đối ngẫu của (I) nếu với mọi điểm chấp nhận x của (I) và y của (II) ta có

$$f(x) \ge \tilde{f}(y).$$

5. ĐIỂM YÊN NGỰA

Điểm yên ngựa là một khái niệm rất hữu ích trong khi nghiên cứu các điều kiện tối ưu và đối ngẫu.

5.1. Định nghĩa

Cho $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ và $F : X \times Y \to R$. Một điểm $(x^*, y^*) \in X \times Y$ được gọi là điểm yên ngựa của hàm F trên $X \times Y$, nếu

$$F(x^*, y) \le F(x^*, y^*) \le F(x, y^*)\ \forall\, x \in X,\ y \in Y.$$

Như vậy nếu (x^*, y^*) là điểm yên ngựa, thì x^* là điểm cực tiểu trên X của hàm $F(.,y^*)$, và y^* là cực đại trên Y của $F(x^*,.)$.

Hãy xét điểm yên ngựa của hàm Lagrange cho bài toán (I).

Hàm này là $\quad L(x,y) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j g_j(x).$

5.2. Định lý 9

Điểm $(x^*, y^*) \in X \times R_+^m$ là điểm yên ngựa của $L(x,y)$ trên $X \times R_+^m$ khi và chỉ khi:

(i) x^* làm cực tiểu hàm $L(x, y^*)$ trên X;

(ii) $g_j(x^* \leq 0$, $(j = 1,..., m)$;

(iii) $y^*_j g_j(x^*) = 0$ với mọi $j = 1,..., m$.

5.3. Định lý 10

Nếu (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của $L(x,y)$ trên $X \times R^m_+$, thì x^* là nghiệm của (I) và y^* là nghiệm của (II).

Lưu ý rằng nói chung không phải mọi lời giải của bài toán gốc (I) đều tồn tại một lời giải của bài toán đối ngẫu (II) để chúng làm thành một điểm yên ngựa của hàm Lagrange $L(x,y)$. Tuy nhiên đối với qui hoạch lồi thoả mãn điều kiện chính qui thì điều đó đúng. Cụ thể ta có kết quả sau.

5.4. Định lý 11

Giả sử (I) là một qui hoạch lồi thoả mãn điều kiện chính quy. Lúc đó x^* là lời giải của (I) khi và chỉ khi tồn tại $y^* \geq 0$ để (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của L trên $X \times R^m_+$ và y^* là nghiệm của bài toán đối ngẫu (II).

PHỤ LỤC C

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

I. TÍCH PHÂN SUY RỘNG VỚI CẬN VÔ HẠN

1. ĐỊNH NGHĨA

1.1. Định nghĩa 1: Tích phân với cận vô hạn

Giả sử hàm f(x) xác định trong khoảng $[a, \infty)$, tức là với $x \geq a$ và khả tích trong bất kỳ một phần hữu hạn nào của nó [a, A], nên tích phân $\int_a^A f(x)$ có nghĩa với A > a tuỳ ý.

Giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn của tích phân đó khi $A \to \infty$ gọi là tích phân (suy rộng) của hàm f(x) trong khoảng từ a đến ∞ và ký hiệu:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx \tag{C1}$$

Tương tự (C1), tích phân từ $-\infty$ đến a của hàm f(x) được định nghĩa như sau:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \quad (A' < a) \tag{C2}$$

cũng như tích phân của hàm f(x) từ $-\infty$ đến $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to +\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx \tag{C3}$$

Với những tích phân đó cũng giữ ký hiệu đã dùng cho tích phân (C1). Trong trường hợp cuối, lấy a tuỳ ý, có thể đặt:

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx$$

và sự tồn tại của giới hạn với $A' \to -\infty$, $A \to +\infty$ đối với tích phân bên trái dĩ nhiên tương đương với sự tồn tại đồng thời những giới hạn (C1) và (C2) cho các tích phân bên phải. Vì vậy tích phân từ $-\infty$ tới $+\infty$ có thể xác định bằng đẳng thức:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

với giả thiết tồn tại đồng thời các tích phân vế phải. Thực ra định nghĩa đó không phụ thuộc vào việc chọn điểm a.

1.2. Định nghĩa 2: Tích phân hội tụ

Trong trường hợp tồn tại giới hạn hữu hạn như vậy người ta nói rằng tích phân (C1) hội tụ, còn hàm f(x) là khả tích trong khoảng vô hạn $[a, \infty]$.

1.3. Định nghĩa 3: Tích phân phân kỳ

Nếu giới hạn (C1) là vô hạn hoặc không tồn tại thì tích phân được gọi là phân kỳ.

2. ÁP DỤNG CÔNG THỨC CƠ BẢN CỦA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN TRONG TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Công thức cơ bản

Giả sử, chẳng hạn, hàm f(x) xác định và liên tục trong khoảng $[a, \infty]$ do đó với f(x) trong khoảng đó tồn tại nguyên hàm F(x) và theo công thức cơ bản của tính tích phân.

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{A}$$

Từ đó rõ ràng rằng tích phân suy rộng (C1) tồn tại trong và chỉ trong trường hợp nếu có giới hạn hữu hạn.

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty)$$

và khi đó:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{\infty}.$$ Tương tự $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

nếu hiểu $F(-\infty)$ là giới hạn $\lim\limits_{A' \to -\infty} F(A')$. Bản thân khả năng tính được thế kép liên quan với sự tồn tại và hữu hạn của giới hạn được viết trong ký hiệu đó bảo đảm cho sự tồn tại của tích phân.

3. CÁC ĐỊNH LÝ ĐƠN GIẢN

3.1. Nếu tích phân $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ, thì $\int_A^\infty f(x)dx$ cũng hội tụ (A > a) và ngược lại.

Lúc đó:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^\infty f(x)dx$$

3.2. Trong trường hợp $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ chúng ta có:

$$\lim_{A \to \infty} \int_A^\infty f(x)dx = 0$$

3.3. Từ sự hội tụ của tích phân $\int_a^\infty f(x)dx$ suy ra sự hội tụ của tích phân $\int_a^\infty c.f(x)dx$ (c = const). Cuối cùng:

3.4. Nếu cả hai tích phân $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_a^\infty g(x)dx$ đều hội tụ, thì $\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx$ hội tụ và

$$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^\infty f(x)dx \pm \int_a^\infty g(x)dx$$

4. SỰ HỘI TỤ CỦA TÍCH PHÂN TRONG TRƯỜNG HỢP HÀM DƯƠNG

Nếu hàm f(x) dương (không âm) thì tích phân:

$$\phi(A) = \int_a^A f(x)dx \tag{C4}$$

là một hàm đơn điệu tăng của biến A. Thì điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng (C1) hội tụ trong trường hợp hàm f(x) dương là tích phân (C4) bị chặn trên khi A tăng:

$$\int_a^A f(x)dx \le L \qquad (L = const)$$

Định lý so sánh cho tích phân của những hàm dương:

Định lý 1: Nếu với $x \ge A$ $(A \ge a)$ có bất đẳng thức $f(x) \le g(x)$ thì từ sự hội tụ của tích phân $\int_a^\infty g(x)dx$ suy ra sự hội tụ của tích phân $\int_a^\infty f(x)dx$ hay là cũng như vậy, từ sự phân kỳ của $\int_a^\infty f(x)dx$ suy ra sự phân kỳ của $\int_a^\infty g(x)dx$.

Thường cũng dùng định lý sau đây, là hệ quả của định lý thứ nhất:

Định lý 2: Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \qquad (0 \le K \le +\infty)$$

thì từ sự hội tụ của tích phân $\int_a^\infty g(x)dx$ với $K < +\infty$ suy ra sự hội tụ của tích phân $\int_a^\infty f(x)dx$, còn sự phân kỳ của tích phân thứ nhất với $K > 0$ suy ra sự phân kỳ của tích phân thứ hai. (Vì vậy, khi $0 < K < +\infty$ cả hai tích phân hội tụ hay phân kỳ đồng thời).

5. SỰ HỘI TỤ CỦA TÍCH PHÂN TRONG TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Vấn đề hội tụ của tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$, theo định nghĩa tổng quát (C1) đưa tới vấn đề tồn tại giới hạn hữu hạn khi $A \to \infty$ của hàm (C4) của biến A. Ta có thể trình bày điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng dưới dạng sau:

Điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ là với mỗi một số $\varepsilon > 0$ có một số $A_0 > a$ sao cho với $A > A_0$ và $A' > A$ có bất đẳng thức sau đây:

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left|\int_a^{A} f(x)dx - \int_a^{A'} f(x)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Tiêu chuẩn này cho phép khẳng định mệnh đề như sau:

Nếu tích phân $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì tất nhiên tích phân $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ.

PHỤ LỤC D

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

I. LÝ THUYẾT

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét hàm f(x, y) của hai biến xác định với mọi giá trị x trong một khoảng [a, b] nào đó hữu hạn hay vô hạn - và mọi giá trị y trong tập hợp $\mathcal{Y} = \{y\}$. Giả sử với mỗi giá trị không đổi của $y \in \mathcal{Y}$, hàm f(x, y) khả tích trong khoảng [a, b] theo nghĩa thường hay nghĩa suy rộng. Khi đó tích phân

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{D1}$$

sẽ là hàm biến phụ hay tham số y.

Đối với hàm I (y) lẽ tự nhiên nảy ra một loạt vấn đề - về sự tồn tại và biểu thức giới hạn của nó theo cách qua giới hạn xác định, đặc biệt về sự liên tục của nó theo y, về tính khả vi và biểu thức của đạo hàm, cuối cùng là về tích phân của hàm đó.

Phần này có vai trò quan trọng trong việc xem xét phiếm hàm mục tiêu của bài toán tính biến phân hoặc điều khiển tối ưu.

1.2. Sự dần đều đến hàm giới hạn

Giả sử hàm f(x, y) xác định trong trường hợp tổng quát, trên tập hợp hai chiều $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, trong đó $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ là các tập hợp các giá trị tương ứng của x và y. $\mathcal{Y}$ có điểm tụ là một số hữu hạn y_0.

Nếu: 1) với hàm f(x, y) khi $y \to y_0$ tồn tại hàm giới hạn nội

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \qquad (x \in \mathcal{X}) \tag{D2}$$

và 2) với mọi số $\varepsilon > 0$, tìm được một số $\delta > 0$ không phụ thuộc x sao cho với $|y - y_0| < \delta$ sẽ có $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ (D3)

Đồng thời với mọi x thuộc $\mathscr{X}$, thì ta nói rằng hàm f(x,y) dần đều đến hàm giới hạn φ (x) tương ứng với x trong miền $\mathscr{X}$.

Dễ dàng phát biểu định nghĩa đó cho trường hợp khi y_0 là một số suy rộng, chẳng hạn $+\infty$; lúc đó chỉ cần thay bất đẳng thức $|y-y_0|<\delta$ bởi bất đẳng thức dạng $y>\Delta$.

1.3. Qua giới hạn dưới dấu tích phân

Bây giờ chúng ta trở lại xét tích phân (D1) phụ thuộc tham số y. Trước tiên ta giới hạn trường hợp đoạn hữu hạn [a, b] và hàm liên tục.

Giả thiết rằng miền biến thiên $\mathscr{Y}$ của tham số y có điểm tụ là y_0, xét vấn đề về giới hạn của hàm (D1) khi $y \to y_0$.

Định lý 1. Nếu hàm f(x,y) với y cố định, liên tục theo x trong [a, b] và khi $y \to y_0$ dần đều tới hàm giới hạn (D2) tương ứng với x, thì có đẳng thức sau:

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \varphi(x)dx \tag{D4}$$

Hệ quả. Nếu hàm f(x,y) với y cố định, liên tục theo x trong [a, b] và khi y đơn điệu tăng tới hàm giới hạn cũng liên tục, thì công thức (D4) đúng.

Với giả thiết rằng miền $\mathscr{Y}$ là một đoạn hữu hạn [c, d] chúng ta xét vấn đề về tính liên tục của hàm (D1).

Định lý 2. Nếu hàm f(x, y) xác định và liên tục của hai biến trong hình chữ nhật [a, b; c, d] thì tích phân (D1) sẽ là một hàm liên tục của tham số y trong đoạn [c, d].

1.4. Lấy đạo hàm dưới dấu tích phân

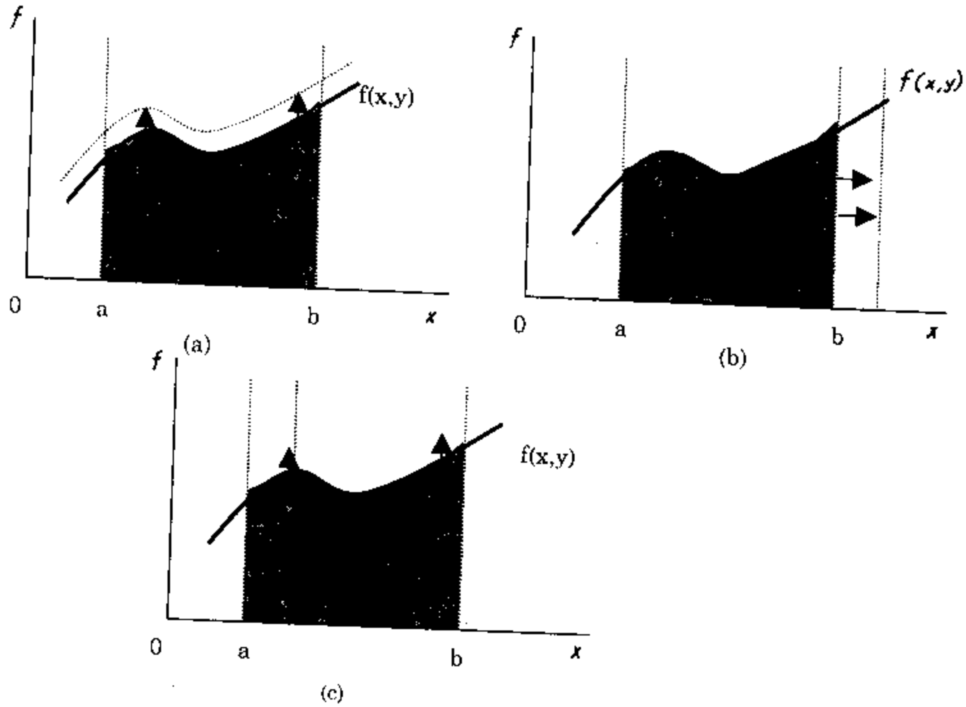
Khi nghiên cứu tính chất của hàm (D1) được cho bởi tích phân có chứa tham số y vấn đề về đạo hàm của hàm đó theo tham số có một ý nghĩa quan trọng.

Với những giả thiết đã biết, để tính đạo hàm I(y) có thể áp dụng công thức:

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx \qquad \text{(quy tắc Leibniz)} \tag{D5}$$

Nếu việc đổi chỗ như thế của các dấu đạo hàm theo y và tích phân theo x thực hiện được thì ta nói rằng hàm (D1) có thể lấy đạo hàm theo tham số "dưới dấu tích phân".

Trực quan đằng sau quy tắc Leibniz có thể thấy từ hình 1, trong đó đường liền nét biểu thị f(x,y), và đường nét đứt biểu thị một vị trí dịch chuyển của f(x,y) sau khi thay đổi trong y. Khoảng cách thẳng đứng giữa hai đường cong (nếu thay đổi là vô cùng bé) đo đạo hàm riêng $f_y(x, y)$ tại mỗi giá trị của x. Suy ra rằng, ảnh hưởng của thay đổi trong x lên toàn bộ tích phân dI/dy, tương ứng với diện tích giữa hai đường cong, hoặc tương đương, tích phân xác định của $f_y(x, y)$ trên khoảng [a,b].



Hình 1

Giá trị của tích phân xác định trên cũng có thể bị ảnh hưởng bởi thay đổi trong cận lấy tích phân.

$$I(a,b)=\int_a^b f(x,y)\,dx\,, \tag{D6}$$

ta có cặp công thức đạo hàm sau đây:

$$\frac{dI}{db} = f(x,y)\big|_{x=b} = f(b,y), \tag{D7}$$

$$\frac{dI}{da} = -f(x,y)\big|_{x=a} = -f(a,y), \tag{D8}$$

Nghĩa là đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên b của tích phân bằng giá trị của hàm dưới dấu tích phân tại x = b; và đạo hàm theo cận dưới a của tích phân là âm của giá trị của hàm dưới dấu tích phân tại x = a.

Trong Hình 1.b, một sự gia tăng trong b được phản ánh trong việc di chuyển của biên phải của diện tích dưới đường cong. Khi sự di chuyển này là vô cùng bé, ảnh hưởng lên tích phân được đo bởi giá trị của hàm f tại biên phải – f(b,y). Điều này cho ta trực quan đối với (D7). Mặt khác, một gia tăng trong cận dưới mang lại một sự di chuyển, như minh hoạ trong Hình 1. c, là sự di chuyển của biên trái, làm giảm diện tích dưới đường cong.

Định lý 3. Giả sử hàm f(x, y) xác định trong hình chữ nhật [a, b; c, d], liên tục theo x trong [a, b] với y cố định tuỳ ý trong [c, d]. Chúng ta giả thiết thêm rằng hàm đó có đạo hàm riêng $f'_y(x, y)$ liên tục theo hai biến trong toàn miền. Khi đó với y tuỳ ý thuộc [c, d] có công thức (D5)

1.4. Lấy tích phân dưới dấu tích phân

Cuối cùng xét vấn đề về lấy tích phân theo y của hàm (D1) chẳng hạn, trong đoạn [c, d].

Chúng ta đặc biệt quan tâm đến trường hợp khi tích phân đó được biểu diễn bằng công thức:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx \tag{D9}$$

khi không có dấu ngoặc, thường viết như sau:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{D10}$$

Khi đó ta nói rằng hàm (D1) có thể lấy tích phân theo tham số y "dưới dấu tích phân" (được lấy theo biến x).

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ đơn giản nhất cho đẳng thức của các tích phân lặp (D10).

Định lý 4. Nếu hàm f(x,y) liên tục (theo cả hai biến) trong hình chữ nhật [a, b; c, d] thì có công thức (D10).

Chúng ta có đẳng thức tổng quát hơn:

$$\int_c^{\eta} dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^{\eta} f(x,y)dy \qquad \text{(D10')}$$

trong đó $c \le \eta \le d$.

Ở vế trái và vế phải của đẳng thức đó chúng ta có hai hàm của tham số η; tính các đạo hàm của chúng theo η.

1.5. Trường hợp cả cận tích phân cũng phụ thuộc tham số

Xét trường mà cả bản thân các cận của tích phân cũng phụ thuộc tham số. Trong trường hợp đó tích phân có dạng

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \qquad \text{(D11)}$$

Chúng ta chỉ giới hạn việc khảo sát vấn đề về sự liên tục và khả vi theo tham số của tích phân tương tự.

Định lý 5. Giả sử hàm f(x,y) xác định và liên tục trong hình chữ nhật [a, b; c, d], các đường cong $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ ($c \le y \le d$) liên tục và vẫn thuộc hình chữ nhật đó. Lúc đó tích phân (D11) là một hàm liên tục của y trong [c, d].

Nếu y_0 là một giá trị nào đấy tuỳ ý của y thì tích phân (D11) có thể viết dưới dạng:

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx \qquad \text{(D12)}$$

Định lý 6. Nếu ngoài những điều nói trên hàm f(x,y) có trong hình chữ nhật [a, b; c, d] đạo hàm liên tục $f'_y(x,y)$ và tồn tại các đạo hàm $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ thì tích phân (D11) có đạo hàm theo tham số và đạo hàm đó được biểu diễn bởi công thức:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y).f(\beta(y),y) - \alpha'(y).f(\alpha(y),y) \quad (D13)$$

Chú ý. Các kết luận của hai định lý vẫn đúng nếu giả thiết rằng hàm f(x,y) được cho (và có các tính chất đã nêu) chỉ trong miền bao giữa các đường cong.

$$x = \alpha(y) \text{ và } x = \beta(y)$$

Các thí dụ

1) Tính tích phân:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \qquad (0 < a \le b)$$

Đến lượt, lại biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng tích phân:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

và đổi thứ thụ lấy tích phân trong tích phân lặp:

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy$$

lấy tích phân theo x và theo y nhận được ngay kết quả:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

2) Có thể cho phép tính đó một dạng khác nếu xét tích phân 1 - với a cố định - như một hàm của tham số b (b ≥ a). Theo định lý 3:

$$\frac{dI}{db} = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}$$

Do đó:

$$I = \ln(b+1) + C$$

Nhưng với b = a, tích phân I, dĩ nhiên, bằng 0, nên C = -ln(a + 1). Thế vào, chúng ta đi đến kết quả như trên đây.

2. SỰ HỘI TỤ ĐỀU CỦA TÍCH PHÂN

2.1. Định nghĩa hội tụ đều của tích phân

Giả thiết rằng hàm f(x,y) được cho với mọi giá trị $x \geq a$, và mọi giá trị y trong một miền $\mathcal{Y}$ nào đó. Tiếp theo, giả sử rằng với mỗi y trong miền đó tồn tại tích phân:

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx \qquad \text{(D14)}$$

Theo chính định nghĩa của tích phân suy rộng với cận vô hạn:

$$\int_a^{\infty} f(x,y)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} f(x,y)dx$$

Vì vậy, tích phân:

$$F(A, y) = \int_a^{A} f(x,y)dx \qquad \text{(D15)}$$

là một hàm của A và y, với y = const và $A \to \infty$ có giới hạn I (y): nếu tích phân đó dần đều đến I (y) tương ứng với y trong miền $\mathcal{Y}$, thì tích phân I(y) gọi là hội tụ đều tương ứng với các giá trị nêu trên của tham số y.

Điều đó có nghĩa là với mỗi $\varepsilon > 0$, tìm được một số $A_0 \geq a$ không phụ thuộc vào y sao cho chỉ cần $A > A_0$ bất đẳng thức.

$$\left|\int_a^{\infty} f(x,y)dx - \int_a^{A} f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

được thực hiện đồng thời với mọi giá trị y trong $\mathcal{Y}$.

2.2. Điều kiện và các tiêu chuẩn đủ của sự hội tụ đều

Sử dụng nguyên lý tổng quát của sự dần đều của hàm về giới hạn, có thể áp dụng vào trường hợp đang xét và phát biểu nó như sau:

Điều kiện cần và đủ để tích phân (D14) hội tụ đều tương ứng với y trong miền $\mathcal{Y}$ là với $\varepsilon > 0$ cho trước tuỳ ý, tìm được một số A_0 không phụ thuộc y sao cho bất đẳng thức.

$$\left|\int_a^{A'} f(x,y)dx - \int_a^{A} f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

được thực hiện đồng thời với mọi y thuộc $\mathcal{Y}$, chỉ với điều kiện $A' > A > A_0$.

Bây giờ ta thiết lập một số tiêu chuẩn mà ta thường dùng để xét sự hội tụ đều của các tích phân trong thực hành.

Chúng ta giả thiết hàm f(x, y) liên tục theo x với x ≥ a. Nếu có một hàm φ (x) chỉ phụ thuộc x, khả tích trong khoảng vô hạn [a, ∞) sao cho với mọi y trong $\mathcal{Y}$.

$f(x,y) \le \varphi(x)$ (với x ≥ a) thì tích phân (D1) hội tụ đều tương ứng với y (trong miền các giá trị của nó đã chỉ trên).

Với những điều kiện vừa chỉ ra đôi khi người ta nói rằng hàm f(x, y) có hàm già khả tích φ(x) hay tích phân (D1) được hàm già bởi tích phân hội tụ:

$$\int_a^{\infty}\varphi(x)dx \text{ không chứa tham số.}$$

2.3. Sử dụng tính hội tụ đều của tích phân

2.3.1. Qua giới hạn dưới dấu tích phân

Xét tích phân với cận vô hạn:

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx \tag{D16}$$

phụ thuộc tham số y (thay đổi trong miền $\mathcal{Y}$)

Các điều kiện đủ cho phép qua giới hạn dưới dấu tích phân được cho bởi định lý sau đây:

Định lý 7. Giả sử hàm f(x, y) xác định với x ≥ a và y thuộc $\mathcal{Y}$: 1) liên tục theo x và 2) với y → y_0 dần đều tới hàm giới hạn φ (x) tương ứng với x trong mỗi đoạn hữu hạn [a, A]. Nếu hơn thế nữa, 3) tích phân (D16) hội tụ đều với y thuộc miền $\mathcal{Y}$, thì:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty}\varphi(x)dx \tag{D17}$$

Từ đó ta có hệ quả sau:

Hệ quả. Giả sử hàm f(x, y) không âm, liên tục theo x với $x \geq a$ và tăng theo y đến hàm giới hạn $\varphi(x)$ cũng liên tục trong khoảng đó. Khi đó, từ sự tồn tại tích phân:

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx \tag{D18}$$

suy ra cả sự tồn tại của tích phân (D16) (với mọi y thuộc $\mathcal{Y}$) cũng như công thức (D17).

Theo định lý trên, với những điều kiện đã chỉ ra, hàm f(x, y) dần đều đến $\varphi(x)$ tương ứng với x trong đoạn hữu hạn tuỳ ý. Tiếp theo, tích phân (D16) tồn tại bởi vì:

$$f(x, y) \leq \varphi(x)$$

Hàm $\varphi(x)$ đồng thời đóng vai trò hàm giả bảo đảm cho sự hội tụ đều (tương ứng với y) của tích phân (D16). Vì vậy tất cả các điều kiện để áp dụng định lý trên đây đều thoả mãn.

Một hệ quả đơn giản của định lý 1 là định lý về sự liên tục của tích phân (D16) theo tham số.

Định lý 8. Giả sử hàm f(x, y) xác định và liên tục (như hàm của hai biến) với $x \geq a$ và các giá trị của y trong đoạn [c, d]. Nếu tích phân (D16) hội tụ đều tương ứng với y trong [c, d] thì nó là một hàm liên tục theo tham số y trong đoạn đó.

Định lý 9. Nếu hàm liên tục f(x, y) không âm, thì từ sự liên tục của tích phân (D1) như hàm của tham số, suy ra sự hội tụ đều của nó.

Trong trường hợp đó hàm liên tục của y.

2.3.2. Lấy đạo hàm của tích phân theo tham số

Định lý 6. Giả sử hàm f(x, y) xác định liên tục theo x với $x > a$ và y trong [c, d], và với các giá trị đó đạo hàm $f'_y(x, y)$ liên tục theo hai biến. Giả thiết thêm rằng tích phân (D16) hội tụ với mọi y trong [c, d] còn tích phân:

$$\int_a^{\infty} f'_y(x,y)dx \tag{D19}$$

không chỉ tồn tại, mà hội tụ đều tương ứng với y trong đoạn đó. Khi đó với y tuỳ ý trong [c, d] có công thức:

$$I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x,y)dx$$

II. ỨNG DỤNG TRONG BÀI TOÁN BIẾN PHÂN

Trong mục này ta xét ứng dụng của lý thuyết đã trình bày ở trên vào bài toán tính biến phân và điều khiển tối ưu. Đặc trưng của bài toán này là hàm mục tiêu của nó thường là một tích phân suy rộng và phụ thuộc vào tham số (theo quan điểm ở đây). Trình bày ở đây nhằm rút ra một số điều kiện áp dụng trực tiếp cho các bài toán này.

Điều kiện I: Cho tích phân phụ thuộc tham số $\int_0^\infty F(t,y,y')dt$, nếu hàm lấy tích phân F là hữu hạn qua suốt khoảng lấy tích phân, và F đạt giá trị 0 tại một điểm hữu hạn nào đó, chẳng hạn t_0, và giữ bằng 0 đối với mọi $t > t_0$, thì tích phân hội tụ.

Điều này có tính chất của một điều kiện đủ. Mặc dù về danh nghĩa, tích phân có tầm vô hạn, nhưng cận trên có tác dụng của phép tích phân là một giá trị hữu hạn t_0. Như vậy, về tác dụng, tích phân suy rộng rút gọn về một tích phân thông thường, với sự bảo đảm rằng nó sẽ cho một giá trị hữu hạn.

Lưu ý rằng điều kiện sau là không đúng: Cho tích phân suy rộng $\int_0^\infty F(t,y,y')dt$, nếu $F \to 0$ khi $t \to \infty$, thì tích phân sẽ hội tụ ?.

Điều kiện này không nhất thiết . Để thấy điều đó, xét hai tích phân

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{(t+1)^2}dt \quad \text{và} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{t+1}dt \qquad \text{(D20)}$$

Mỗi tích phân này có hàm lấy tích phân tiến tới 0 khi $t \to \infty$. Nhưng I_1 hội tụ còn I_2 thì không.

$$I_1 = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^b = 1 \qquad I_2 = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(t+1)\right]_0^b = \infty \quad \text{(D21)}$$

Điều gì giải thích cho sự khác biệt sâu sắc này? Câu trả lời là ở tốc độ mà hàm lấy tích phân giảm về 0. Trong trường hợp I_1, trong đó mẫu số của hàm lấy tích phân là số hạng bình phương, phân số giảm với tốc độ đủ cao khi t lấy các giá trị lớn hơn tăng dần, dẫn đến sự hội tụ. Mặt khác, trong trường hợp I_2, tốc độ giảm không đủ lớn, và tích phân phân kỳ. Kết luận là, điều kiện "$F \to 0$ khi $t \to \infty$" tự nó không đảm bảo hội tụ.

Cũng là lý thú khi hỏi ngược lại: Điều kiện "$F \to 0$ khi $t \to \infty$" có là điều kiện cần để $\int_0^\infty F(t, y, y')dt$ hội tụ không? Một điều kiện cần như vậy về trực quan có vẻ hợp lý, và trên thực tế nó thường được chấp nhận. Nhưng có thể đưa ra các phản thí dụ để chứng tỏ rằng một tích phân suy rộng có thể hội tụ mặc dù F không tiến tới 0, do đó điều kiện này không phải là cần thiết. Thí dụ, nếu:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \le t \le n + \dfrac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

thì F(t) không có giới hạn nào khi t tiến ra vô hạn; nhưng tích phân $\int_0^\infty F(t)dt$ hội tụ đến $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$. Một thí dụ khác, tích phân $\int_0^\infty \sin t^2 dt$ hội tụ về giá trị $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$ mặc dù hàm sin dưới dấu tích phân không có giới hạn 0.

Tuy nhiên, lưu ý rằng các phản thí dụ này bao hàm hoặc một kiểu không bình thường của hàm lấy tích phân không liên tục hoặc một hàm lấy tích phân thay đổi dấu theo chu kỳ, bằng cách đó cho phép những đóng góp vào tích phân từ những khoảng thời gian cạnh nhau triệt tiêu lẫn nhau. Những hàm như vậy không thường gặp trong các mô hình kinh tế. Điển hình, trong một mô hình kinh tế, những hàm thường gặp như hàm lợi nhuận, hàm lợi ích... được giả thiết là liên tục và không âm. Đối với những hàm như vậy, các phản thí dụ trên không thích hợp.

Điều kiện II: Trong tích phân $\int_0^\infty F(t, y, y')dt$, nếu hàm lấy tích phân có dạng $G(t,y,y') e^{-\rho t}$, trong đó ρ là hệ số chiết khấu dương, và G là hàm bị chặn, thì tích phân hội tụ.

Nét phân biệt của tích phân này là sự có mặt thừa số $e^{-\rho t}$ mà, với những nhân tố khác không đổi, nó cho một lực để hàm lấy tích phân giảm xuống 0 liên tục theo thời gian với một tốc độ đủ lớn. Khi thành phần G(t, y, y') của hàm lấy tích phân là dương (như trong hầu hết các ứng dụng kinh tế) và có một giới hạn trên, chẳng hạn $\bar{G}$, thì lực lái xuống $e^{-\rho t}$ là đủ để làm cho tích phân hội tụ. Nói một cách hình thức hơn, vì giá trị của hàm G không bao giờ có thể vượt quá giá trị của hằng số $\bar{G}$, ta có thể viết:

$$\int_0^\infty G(t, y.y')e^{-\rho t}dt \leq \int_0^\infty \bar{G}e^{-\rho t}dt = \frac{\bar{G}}{\rho} \qquad \text{(D22)}$$

Đẳng thức cuối cùng, dựa trên công thức đối với giá trị hiện tại của một luồng vĩnh viễn không đổi, cho thấy rằng tích phân thứ hai trong (D22), với giới hạn trên $\bar{G}$ trong hàm dưới dấu tích phân, là hội tụ. Suy ra rằng, tích phân thứ nhất, mà hàm lấy tích phân của nó là $G \leq \bar{G}$, cũng phải hội tụ. Ở đây ta có một điều kiện đủ khác đối với hội tụ.

Trong kinh tế hàm G(t, y, y') được xét thường là không âm, trong trường hợp này tích phân vế trái phải hội tụ vì dãy tích phân $I_T = \int_0^T G dt$ không giảm và bị chặn trên.

Cũng có những điều kiện đủ khác, nhưng chúng không đơn giản nên ta không bàn đến. Sau đây, nếu hàm F được cho dưới dạng tổng quát, ta sẽ luôn giả thiết rằng tích phân là hội tụ. Điều này, đối với các ứng dụng kinh tế thông thường, kéo theo rằng hàm lấy tích phân F dần tới 0 khi t dần tới vô cùng. Tuy nhiên khi dùng các hàm cụ thể chúng ta cũng sẽ kiểm chứng tính hội tụ trong trường hợp cần thiết.

PHỤ LỤC E

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

A. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

I. KHÁI NIỆM

1. ĐỊNH NGHĨA: Phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{E1}$$

Trong đó hàm F xác định trong miền $D \subset R^3$.

Nếu trong miền D, từ phương trình (E1) ta có thể giải được y':

$$y' = f(x, y) \tag{E2}$$

Đây là phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.

Hàm $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trên khoảng $I = (a, b)$ được gọi là nghiệm của phương trình (E1) nếu:

a) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ với mọi $x \in I$

b) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ trên I.

Thí dụ phương trình:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \tag{E3}$$

có nghiệm là hàm $y = Ce^{2x}$ xác định trên khoảng $(-\infty, +\infty)$ (C là hằng số tuỳ ý).

Chú ý: nhiều khi người ta viết phương trình đã giải ra đạo hàm dưới dạng đối xứng sau:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{E4}$$

Chúng ta dễ dàng thấy sự tương đương giữa cách viết (E2) và (E4).

2. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ ĐẦU (INITIAL VALUE PROBLEM) (BÀI TOÁN CAUCHY)

2.1. Bài toán

Qua thí dụ trên ta thấy rằng nghiệm của phương trình vi phân cấp một là vô số. Tập hợp nghiệm của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc vào một hằng số tuỳ ý C. Trong thực tế người ta thường quan tâm đến nghiệm của phương trình vi phân cấp một thoả mãn những điều kiện nào đấy. Chẳng hạn tìm nghiệm y(x) của phương trình (E1) hoặc (E2) thoả mãn điều kiện

$$y(x_0) = y_0 \tag{E5}$$

trong đó x_0, y_0 là các số cho trước.

Điều kiện (E5) được gọi là điều kiện ban đầu (điều kiện đầu). Bài toán tìm nghiệm của phương trình (E1) thoả mãn điều kiện ban đầu (E5) được gọi là bài toán Cauchy. Sau này chúng ta sẽ thấy với những điều kiện nào thì nghiệm của bài toán Cauchy là tồn tại và duy nhất.

2.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy

Xét phương trình:

$$y' = f(x, y) \tag{E6}$$

f xác định trong miền $G \subset R^2$. Ta sẽ chỉ ra các điều kiện mà f thoả mãn để bài toán Cauchy ứng với phương trình (E6) có nghiệm duy nhất.

2.1.1. Điều kiện Lipsit

Ta nói rằng trong miền G, hàm f(x, y) thoả mãn điều kiện Lipsit theo biến y nếu tồn tại hằng số L > 0 sao cho đối với hai điểm bất kỳ $(x, y_1) \in G$ và $(x, y_2) \in G$ ta có bất đẳng thức:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \tag{E7}$$

2.1.2. Dãy xấp xỉ Picard

Ta thiết lập hàm f(x, y) liên tục trong miền G, điểm (x_0, y_0) là điểm trong của G. Chọn các số dương a,b sao cho hình chữ nhật:

$$M = Q = \begin{cases} |x - x_0| \le a \\ |x - x_0| \le b \end{cases}$$

chứa trong G. Đặt $M = \max_{Q} |f(x, y)|$. Ký hiệu $h = \min\{a, b/M\}$.

Ta xây dựng nghiệm xấp xỉ của phương trình (E6) như sau:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0(\tau))d\tau, \qquad x \in [x - h, x_0 + h]$$

....

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau, \quad x \in [x - h, x_0 + h]$$

Dãy $\{y_n\}$xác định như trên được gọi là dãy xấp xỉ Picard. Có thể chỉ ra rằng khi x biến thiên trong $[x - h, x_0 + h]$ thì $(x, y_n) \in Q$ với mọi n = 0, 1, 2, ...

2.2.3. Định lý Cauchy-Picard (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)

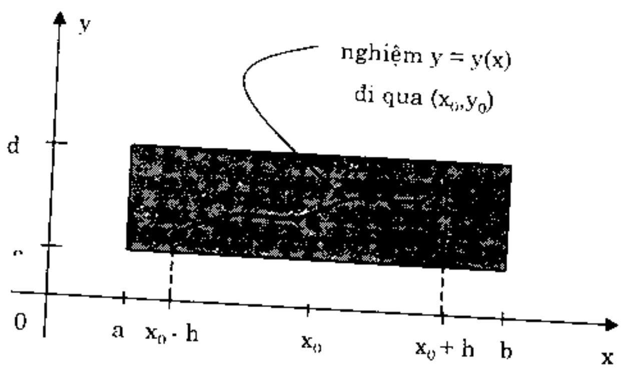
Giả sử hàm f thoả mãn các điều kiện sau đây:

a) f liên tục trong miền G;

b) f thoả mãn điều kiện Lipsit theo y trong G.

Khi đó ứng với mỗi điểm trong $(x_0, y_0) \in G$ tồn tại duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (E6) thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$. Nghiệm này xác định trên đoạn $[x - h, x_0 + h]$. Trong đó h được xác định như ở phần xây dựng dãy xấp xỉ Picard.

Điều này chỉ trong hình vẽ dưới đây:



Hình E.1

2.2.4. Hệ quả

Giả sử hàm f liên tục cùng với đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ trong miền G. Khi đó qua mỗi điểm trong $(x_0, y_0) \in G$ có một và chỉ một đường cong tích phân của hệ (E6) đi qua.

3. CÁC LOẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Xét phương trình:

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(E8)}$$

f xác định và liên tục trên miền $G \subset R^2$.

3.1. Định nghĩa

Ta nói G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm đối với phương trình (E8) nếu qua mỗi điểm của miền G có một và chỉ một đường cong tích phân của (E8) đi qua

3.2. Nghiệm tổng quát

Ta nói rằng hàm $y = \varphi(x,C)$ (E9)

là nghiệm tổng quát của phương trình (E8) trong miền G nếu

a) Từ hệ thức $y_0 = \varphi(x_0,C)$ (E10)

ta có thể giải ra được $C = \psi(x_0, y_0)$ (E11)

với mỗi $(x_0, y_0) \in G$.

b) Hệ thức (E9) là nghiệm của (E8) với mỗi hằng số C được xác định từ (E11).

3.3. Tích phân tổng quát

Nhiều khi giải phương trình (E8) ta đi đến hệ thức dạng $\psi(x, y) = C$ hay tổng quát hơn, dạng $\Phi(x,y,C) = 0$ (E12)

Hệ thức (E12) được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (E8) trong miền G nếu trong miền đó (E12) xác định nghiệm tổng quát $y = \varphi(x,C)$ của phương trình (E8).

3.4. Nghiệm riêng (nghiệm đặc biệt)

Nghiệm của (E8) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được bảo đảm, được gọi là nghiệm riêng. Điều này có nghĩa là tại mỗi điểm của đường cong tích phân ứng với nghiệm riêng không có một đường cong tích phân nào khác nó đi qua.

Như vậy, nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị xác định của hằng số C là nghiệm riêng.

3.5. Nghiệm kỳ dị và nghiệm trung gian

Nghiệm của (E8) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ, được gọi là nghiệm kỳ dị. Điều này có nghĩa là tại mỗi điểm của đường cong tích phân ứng với nghiệm kỳ dị có ít nhất một đường cong tích phân khác nó đi qua. Trong miền tồn tại và duy nhất nghiệm không thể có đường cong tích phân ứng với nghiệm kỳ dị. Bởi vậy nghiệm kỳ dị không thể nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị xác định của hằng số C bất kỳ.

Ngoài ra, đối với phương trình vi phân (E8) có thể tồn tại nghiệm không phải là kỳ dị và cũng không phải là nghiệm riêng. Nghiệm như vậy gọi là nghiệm trung gian.

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁCH GIẢI

1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{E13}$$

1.2. Cách giải

Ta giả thiết p(x), q(x) liên tục trên khoảng (a, b). Khi đó trong miền:

$$G = \begin{cases} a < x < b \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình (E13) tồn tại và duy nhất.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (E13), trước hết ta xét phương trình:

$$y' + p(x)y = 0 \tag{E14}$$

phương trình trên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với (E13). Ta viết lại (E14) dưới dạng:

$$dy + p(x)ydx = 0 \tag{E15}$$

Giả sử $y \neq 0$. Chia hai vế của (E15) cho y:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \tag{E16}$$

Tích phân phương trình (E16) ta được:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \neq 0) \tag{E17}$$

Rõ ràng $y \equiv 0$ cũng là nghiệm của (E14). Nghiệm này có thể nhận được từ (E17) nếu trong biểu thức (E17) ta lấy cả giá trị C = 0.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (E14) có dạng:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},\ C \in R \tag{E18}$$

Để tìm nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (E13) ta áp dụng phương pháp biến thiên hằng số. Nội dung của phương pháp này như sau: Trong biểu thức (E18) ta coi C không phải là hằng số mà là hàm số của x: C = C(x) và tìm cách chọn C(x) sao:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{E19}$$

thoả mãn phương trình (E13). Thay (E19) vào (E13) ta có:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay: $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$

Từ đây suy ra:

$$C(x) = \int\left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx + C \tag{E20}$$

Thay biểu thức C(x) từ (E20) vào (E19) ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (E13):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int\left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx\right] \quad \text{(E21)}$$

Nhận xét: Khi $q(x) \equiv 0$, biểu thức (E21) cho ta nghiệm tổng quát dạng (E18) của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

2. NGHIỆM BÀI TOÁN CAUCHY

Giả sử $(x_0, y_0) \in G$. Ta tìm nghiệm y(x) của phương trình (E13) thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$. Ký hiệu:

$$\Phi(x) = \int p(x)dx$$

Khi đó (E21) được viết dưới dạng:

$$y(x) = e^{-\Phi(x)}\left[C + \int q(x)e^{\Phi(x)}dx\right] \quad \text{(E22)}$$

Đặt $\psi(x) = \int q(x)e^{\Phi(x)}dx$ và viết lại (E22) dưới dạng:

$$y(x) = e^{-\Phi(x)}\left[C + \psi(x)\right]$$

Theo điều kiện ban đầu ta có:

$$y_0 = y(x_0) = e^{-\Phi(x_0)}\left[C + \psi(x_0)\right]$$

Từ đây suy ra:

$$C = y_0 e^{\Phi(x_0)} - \psi(x_0)$$

Thay giá trị này của C vào (E23) ta được:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\Phi(x)}\left[y_0 e^{\Phi(x_0)} - \psi(x_0) + \psi(x)\right] \\ &= e^{-(\Phi(x)-\Phi(x_0))}y_0 + e^{-\Phi(x)}\left(\psi(x) - \psi(x_0)\right) \end{aligned}$$

Từ đây và từ công thức Newton-Leibniz ta thu được:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau} y_0 + e^{-\Phi(x)}\int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{\Phi(\tau)}d\tau \\ &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau} y_0 + e^{-\Phi(x)+\Phi(x_0)}\int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{\Phi(\tau)-\Phi(x_0)}d\tau \quad \text{(E23)} \end{aligned}$$

hay:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}d\tau\right] \qquad \text{(E24)}$$

Biểu thức nghiệm bài toán Cauchy dạng trên có nhiều ứng dụng khi nghiên cứu một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

B. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP n

I .ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = g(x) \qquad \text{(E25)}$$

Ta giả thiết các hàm $a_0(x)$, $a_1(x)$,..., $a_n(x)$, $g(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) và:

$a_0(x) \neq 0$ trên (a, b). Khi đó chia hai vế của (E25) cho $a_0(x)$ ta được phương trình:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x) \qquad \text{(E26)}$$

trong đó $p_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)}, f(x) = \dfrac{g(x)}{a_0(x)}$ (i = 1,2,..., n) là những hàm liên tục trên khoảng (a, b).

Nếu trong phương trình (E26) hàm $f(x) \equiv 0$ tức là ta có phương trình:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0 \qquad \text{(E27)}$$

thì nó được gọi là phương vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n.

Phương trình (E26) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp n.

Với các giả thiết đã nêu ở trên, đối với bất kỳ điểm $x_0 \in$ (a, b) và $(y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in R^n$, phương trình (E26) có nghiệm duy nhất thoả mãn điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad \text{(E28)}$$

2. TÍNH CHẤT CỦA PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP n

(i). Phép thế biến số độc lập không làm mất tính tuyến tính của phương trình (E25).

(ii). Phép biến đổi tuyến tính hàm phải tìm

$$y = v(x)\, z + u(x) \tag{E29}$$

trong đó v, u khả vi liên tục n lần trên (a, b) và $v(x) \neq 0$, không làm mất tính tuyến tính của phương trình (E25).

II. LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT CẤP n

Trong mục này ta sẽ tóm tắt một số tính chất và cấu trúc của tập nghiệm phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n.

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y = 0 \tag{E30}$$

trong đó $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ liên tục trên khoảng (a, b).

1. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH

Để đơn giản cách viết về sau, ta ký hiệu:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y \tag{E31}$$

L[y] được gọi là toán tử vi phân tuyến tính. Với ký hiệu trên phương trình (E30) được viết dưới dạng:

$$L[y] = 0 \tag{E32}$$

Toán tử L[y] có các tính chất sau:

a) Đối với $y_1(x)$, $y_2(x)$ khả vi n lần liên tục ta có:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

b) Đối với hàm khả vi liên tục n lần y(x) và hằng số C bất kỳ ta có:

$$L[Cy] = CL[y],$$

nói cách khác, hằng số C có thể đưa ra ngoài dấu của toán tử vi phân.

Dựa vào tính chất của toán tử L ta suy ra các tính chất sau đây của tập nghiệm phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n:

a) Nếu y(x) là nghiệm của phương trình (E30) thì Cy(x) với C là hằng số tuỳ ý cũng là nghiệm của phương trình (E30).

b) Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm bất kỳ của phương trình (E30) thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (E30).

c) Nếu $y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)$ là các nghiệm của phương trình (E30) thì $y(x) = C_1y_2(x) + C_2y_2(x) + ... + C_k y_k(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (E30). Tính chất này là hệ quả của các tính chất a), b).

2. SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH VÀ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH CỦA HỆ HÀM

Giả sử ta có hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_k(x)$ xác định trên khoảng (a, b).

Định nghĩa: Hệ hàm trên được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_k\ \varphi_k(x) \equiv 0 \text{ trên } (a,b) \quad \text{(E33)}$$

Nếu đồng nhất thức (E33) chỉ có thể xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ thì hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên (a, b).

3. ĐỊNH THỨC WRONSKI

Việc nghiên cứu sự phụ thuộc hay độc lập tuyến tính có thể đơn giản hơn nhờ định thức Wronski mà ta sẽ đưa ra định nghĩa dưới đây.

3.1. Định nghĩa

Giả sử hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_k(x)$ khả vi k - 1 lần trên khoảng (a, b). Khi đó định thức:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k] \equiv W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & ... & \varphi_k(x) \\ \varphi'_2(x) & \varphi'_2(x) & ... & \varphi'_k(x) \\ .... & & & \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & ... & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronski của hệ hàm trên.

3.2. Định lý

Định lý sau đây cho ta một điều kiện cần của sự phụ thuộc tuyến tính của hệ hàm.

3.2.1. Định lý 1

Giả sử hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ khả vi k - 1 lần và phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b). Khi đó định thức Wronski của chúng đồng nhất bằng 0 trên khoảng đó.

Hệ quả. Nếu định thức Wronski của hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ khác 0 dù chỉ tại một điểm của khoảng (a, b) thì hệ hàm trên độc lập tuyến tính trên (a, b).

3.2.2. Định lý 2

Giả sử hệ $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ là n nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n (E30). Điều kiện cần và đủ để hệ hàm trên phụ thuộc tuyến tính trên (a, b) là định thức Wronski của chúng đồng nhất bằng 0 trên khoảng đó.

Hệ quả. Định thức Wronski của n nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n hoặc là đồng nhất bằng 0 trên (a, b) hoặc là khác 0 tại mọi điểm của khoảng (a, b).

4. CÔNG THỨC CỦA ĐỊNH THỨC WRONSKI

4.1. Công thức

Từ quá trình trên ta thấy vai trò của định thức Wronski quan trọng như thế nào. Do việc giải phương trình (E30) trong trường hợp tổng quát không thực hiện được nên tìm biểu thức của định thức Wronski của n nghiệm phương trình (E30) là điều không thể làm được. Tuy vậy người ta đã tìm ra được biểu thức của định thức Wronski của n nghiệm phương trình (E30) mà không cần giải nó và đưa ra công thức nổi tiếng sau đây:

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \qquad C = \text{const}$$

hoặc:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}$$ trong đó $p_1(x)$ là hệ số của $y^{(n-1)}$

4.2. Ứng dụng công thức của định thức Wronski để tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = 0 \qquad \text{(E34)}$$

Khi biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của nó. Giả sử y(x) là nghiệm bất kỳ của phương trình này khác $y_1(x)$. Khi đó theo công thức trên ta có:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

hay:

$$y_1 y' - y'_1 y = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Chia hai vế cho $y_1^2(x)$ ta được:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Do đó:

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2 \right\}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai.

5. HỆ NGHIỆM CƠ BẢN. NGHIỆM TỔNG QUÁT

5.1. Định nghĩa

Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

Câu hỏi đặt ra ở đây là phương trình (E30) có hệ nghiệm cơ bản không? Ta có khẳng định sau đây:

5.2. Định lý

5.2.1. Định lý 3

Phương trình (E30) với các hệ số $p_i(x)$, i = 1,2,..., n liên tục trên (a, b) có vô số hệ nghiệm cơ bản.

5.2.2. Định lý 4

Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình (E30). Khi đó biểu thức:

$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$ ($C_1, C_2,..., C_n$ là các hằng số), cho ta nghiệm tổng quát của phương trình (E30).

Định lý trên chứng tỏ rằng phương trình tuyến tính thuần nhất (E30) có n nghiệm độc lập tuyến tính trên (a, b). Định lý dưới đây ta sẽ thấy rằng số nghiệm độc lập tuyến tính lớn nhất của phương trình (E30) đúng bằng n.

5.2.3. Định lý 5

Hệ n + 1 nghiệm $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x), y_{n+1}(x)$ của phương trình (E30) phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b).

III. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT

1. NGHIỆM TỔNG QUÁT

Trong phần này ta sẽ tóm tắt tính chất và cấu trúc nghiệm của phương trình:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \quad \text{(E35)}$$

trong đó các hàm $p_1(x),..., p_n(x), f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b). Nếu dùng ký hiệu toán tử vi phân tuyến tính $L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y$ thì phương trình (E35) có thể được viết dưới dạng:

$$L[y] = f(x)$$

Dựa vào tính chất của toán tử L, dễ dàng kiểm tra các tính chất sau đây của phương trình tuyến tính không thuần nhất.

a) Nếu z(x) là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y = 0 \quad \text{(E36)}$$

và $y_1(x)$ là một nghiệm riêng nào đấy của (E35) thì $y(x) = z(x) + y_1(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (E35).

b) Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm tương ứng của các phương trình không thuần nhất:

$$L[y] = f_1(x)$$

$$L[y] = f_2(x)$$

thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm của phương trình.

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x).$$

Tính chất này của phương trình tuyến tính không thuần nhất đôi khi còn được gọi là nguyên lý chồng chất nghiệm.

Bây giờ giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình (E36); $y^*(x)$ là một nghiệm riêng nào đấy của phương trình không thuần nhất (E35). Khi đó biểu thức;

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) + y^*(x) \qquad \text{(E37)}$$

cho ta nghiệm tổng quát của phương trình (E35)

Từ (E37) ta suy ra rằng nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng tổng của một nghiệm riêng nào đấy của phương trình đó và nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng.

2. PHƯƠNG PHÁP BIẾN THIÊN HẰNG SỐ (PHƯƠNG PHÁP LAGRANGE)

Trong phần trên ta đã tìm thấy rằng nếu biết được nghiệm tổng quát của phương trình (E36) và một nghiệm riêng nào đấy của (E35) thì ta sẽ tìm được nghiệm tổng quát của (E35). Sau này ta sẽ thấy rằng trong nhiều trường hợp ta có thể tìm được hệ nghiệm cơ bản của (E36) và do đó nghiệm tổng quát của nó. Vì vậy việc tìm nghiệm riêng của (E35) đóng vai trò rất quan trọng. Dưới đây ta sẽ chỉ ra một phương pháp tìm nghiệm riêng của (E35) khi biết hệ nghiệm cơ bản của (E36). Đó là phương pháp biến thiên hằng số hoặc phương pháp Lagrange. Ta xét phương pháp này qua thí dụ sau:

Thí dụ. Xét phương trình: $xy'' - y' = x^2$. Phương trình thuần nhất tương ứng

$xy'' - y' = 0$. Phương trình này có thể viết được dưới dạng: $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$. Từ đây suy ra $y' = C_1 x$ và do đó: $y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Từ đây ta suy ra nó có hệ nghiệm cơ bản là $y_1 = 1$; $y_2 = x^2$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình đang xét dưới dạng:

$$y^*(x) = C_2(x)x^2 + C_1(x)$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1.C_1'(x) + x^2C_2'(x) = 0 \\ 0.C_1'(x) + 2xC_2'(x) = x \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được: $C_1'(x) = -\frac{x^2}{2}; C_2'(x) = \frac{1}{2}$

Do đó: $C_1(x) = -\frac{x^3}{6}, C_2(x) = \frac{1}{2}x$ và $y^*(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^3 = \frac{x^3}{3}$

Nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là:

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3} \quad (C_1, C_2 \text{ là hằng số})$$

IV. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP n DẠNG ĐẶC BIỆT

Trong mục này ta sẽ xem xét vắn tắt một số lớp phương trình tuyến tính mà đối với chúng, ta có thể xây dựng được nghiệm tổng quát hoặc xem xét được một số tính chất của nghiệm.

1. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT VỚI HỆ SỐ HẰNG

Dạng tổng quát:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0 \tag{E38}$$

trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các hằng số thực. Nếu ta dùng ký hiệu của toán tử vi phân tuyến tính

$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny$, thì phương trình (E38) được viết dưới dạng:

$$L[y] = 0 \tag{E39}$$

Trước khi đi xét nghiệm tổng quát của phương trình (E38) ta nêu ra khẳng định sau đây:

1.1. Bổ đề:

Nếu phương trình (E38) có nghiệm phức $y(x) = u(x) + iv(x)$ thì phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ là các nghiệm thực của phương trình (E38).

Lưu ý rằng: Khẳng định của bổ đề đúng cho cả trường hợp khi các hệ số của phương trình tuyến tính thuần nhất là các hàm số thực.

1.2. Phương pháp xây dựng nghiệm tổng quát của phương trình $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0$

Ta tìm nghiệm của (E38) dưới dạng $y = e^{\lambda x}$, trong đó hằng số λ được xác định sao cho y là nghiệm của (E38). Muốn vậy ta thay biểu thức của y vào (E38). Ta có:

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ..., y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Do đó
$$L[y] = L[e^{\lambda x}] = \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n\right)e^{\lambda x} \qquad \text{(E40)}$$

Ta ký hiệu: $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ (E41)

(E41) được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình (E38). Từ (E40) ta có:

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}F(\lambda) \qquad \text{(E42)}$$

Vì $e^{\lambda x} \neq 0$ nên hàm $y = e^{\lambda x}$ là nghiệm của (38) khi và chỉ khi:

$$F(\lambda) = 0 \text{ hay } \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad \text{(E43)}$$

Hệ thức (E43) được gọi là phương trình đặc trưng tương ứng với (E38). Như vậy để hàm $e^{\lambda x}$ là nghiệm của (E38) thì λ phải là nghiệm của phương trình đặc trưng và ngược lại. Ta sẽ xét các trường hợp riêng biệt sau đây:

1.2.1. Phương trình đặc trưng $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ có n nghiệm thực khác nhau:

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\ (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ nếu } i \neq j)$$

Khi đó ta xây dựng được n nghiệm riêng của phương trình (E38) sau:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Hệ này lập nên hệ nghiệm cơ bản của phương trình (E38).

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (E38) có dạng:

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + ... + C_ne^{\lambda_n x}$, trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số bất kỳ.

1.2.2. Phương trình đặc trưng $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ có n nghiệm khác nhau: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nhưng có nghiệm phức

Nếu xây dựng nghiệm của (E38) như đã làm ở phần 1 thì ta vẫn được hệ n nghiệm độc lập tuyến tính nhưng trong chúng có nghiệm phức. Để tránh điều này ta tiến hành như sau: Giả sử $\alpha + i\beta$ là một nghiệm phức của phương trình đặc trưng (E43). Khi đó $\alpha - i\beta$ cũng là một nghiệm phức của phương trình đặc trưng (E43). Đối với cặp nghiệm phức liên hợp này của (E43) ta có hai nghiệm phức của (E38) là $e^{(\alpha + i\beta)x}$, $e^{(\alpha - i\beta)x}$. Theo công thức Euler:

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

Áp dụng bổ đề trên ta suy ra rằng phần thực: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, phần ảo: $e^{\alpha x}\sin\beta x$ là hai nghiệm thực của phương trình (E38). Hai nghiệm này độc lập tuyến tính .

Như vậy ứng với mỗi cặp nghiệm phức liên hợp $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ của phương trình (E43) ta xây dựng được hai nghiệm thực độc lập tuyến tính của phương trình (E38) là $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Kết hợp chúng với những nghiệm thực khác ta xây dựng được hệ nghiệm cơ bản của (E38).

1.2.3. Trường hợp phương trình đặc trưng $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ có nghiệm bội

Nếu một nghiệm nào đó của phương trình đặc trưng (E43) đó bội ≥ 2 thì bằng cách xây dựng nghiệm như ở phần 1 hoặc 2 ta không thể xây dựng đủ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (E38). Cụ thể, chẳng hạn nghiệm λ_1 bội k, còn các nghiệm còn lại là đơn thì bằng cách xây dựng như trên ta chỉ được n - k + 1 nghiệm độc lập tuyến tính của (E38) và như vậy ta còn thiếu k-1 nghiệm độc lập tuyến tính nữa. Để làm được điều đó ta đưa vào bổ đề sau đây:

Bổ đề

Với mọi số nguyên $m \geq 0$ ta có: $L[x^m e^{\lambda x}] = \sum_{v=0}^{m} C_m^v F^{(v)}(\lambda) \quad x^{m-r} e^{\lambda x}$

Vì λ_1 là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng $F(\lambda) = 0$ nên ta có:

$$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = ... = F^{(k-1)}(\lambda_1) = 0,\ F^{(k)}(\lambda_1) \neq 0$$

Trong công thức trên lần lượt cho m = 1,2,..., k - 1 ta suy ra rằng các hàm

$xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ là các nghiệm của phương trình (E38). Như ta đã biết, hệ các hàm này độc lập tuyến tính và do đó nó bổ sung vào k - 1 nghiệm độc lập tuyến tính thiếu ở trên.

2. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT VỚI HỆ SỐ HẰNG

Trong mục này ta xét phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng sau:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x) \quad \text{(E44)}$$

Trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các hằng số, f(x) liên tục trên khoảng (a, b). Nếu dùng ký hiệu toán tử $L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny$, thì (E44) được viết dưới dạng:

$$L[y] = f(x) \quad \text{(E45)}$$

Như đã biết, phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng của nó là L[y] = 0 có thể giải được, nghĩa là ta có thể tìm được hệ nghiệm cơ bản của nó. Nhưng khi đó áp dụng phương pháp biến thiên hằng số ta có thể tìm nghiệm riêng y*(x) của phương trình không thuần nhất (E44) và do đó có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình (E44). Tuy nhiên, khi áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng của phương trình (E44) nhiều lúc ta đi đến những tính toán phức tạp. Trong trường hợp hàm f(x) có những dạng đặc biệt (khá thông dụng) ta có thể áp dụng phương pháp hệ số bất định dưới đây để tìm nghiệm riêng của phương trình (E44) một cách đơn giản hơn.

2.1. Trường hợp 1

Hàm f(x) có dạng một đa thức cấp m nhân với hàm mũ:

$f(x) = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m)\ e^{\alpha x}$, trong đó $b_0, b_1, ..., b_m, \alpha$ là các hằng số.

Ta ký hiệu: $P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$

Khi đó phương trình (E44) được viết dưới dạng $L[y] = P_m(x)\, e^{\alpha x}$ (E46)

Có hai trường hợp có thể xảy ra sau đây:

a) α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

tức là $F(\alpha) \neq 0$. Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (44) dưới dạng:

$$y^*(x) = Q_m(x)\ e^{\alpha x} \tag{E47}$$

trong đó $Q_m(x)$ là một đa thức cấp m với các hệ số cần xác định:

$$Q_m(x) = d_0x^m + d_1x^{m-1} + ... + d_m$$

Để xác định các hệ số $d_0, d_1, ..., d_m$ ta thay (E47) vào (E46) và sau khi giản ước thừa số $e^{\alpha x}$ ta đồng nhất các hệ số của các luỹ thừa cùng bậc của x ở hai đa thức vế phải và vế trái.

b) α là nghiệm bội k ($k \geq 1$) của phương trình đặc trưng , khi đó:

$$F(\alpha) = F'(\alpha) = ... = F^{(k-1)}(\alpha);\ F(\alpha)^{(k)} \neq 0.$$

Trong trường hợp này ta không thể tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng (E47) vì $F(\alpha)=0$ không cho phép ta xác định được các hệ số $d_0, d_1, ...d_m$. Ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng: $y^*(x) = x^kQ_m(k)e^{\alpha x}$

Hệ quả: Nếu f(x) là đa thức cấp m:

$$f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$$

thì ta đi đến quy tắc tìm nghiệm riêng như sau:

(i) Nếu mọi nghiệm của phương trình đặc trưng khác không thì ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y^*(x) = d_0x^m + d_1x_{m-1} + ... + d_m \tag{E48}$$

(ii) Nếu phương trình đặc trưng có một nghiệm bằng 0 bội k thì ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y^*(x) = x^k(d_0x^m + d_1x^{m-1} + ... + d_m) \tag{E49}$$

2.2. Trường hợp 2

Hàm f(x) có dạng:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x] \tag{E50}$$

trong đó $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$ là các đa thức của x bậc không quá m và ít nhất một trong hai đa thức trên có bậc bằng m. Có thể một trong hai là hằng số, thậm chí đồng nhất bằng 0.

Áp dụng phép biến đổi Euler:

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \quad \text{(E51)}$$

ta viết lại f(x) dưới dạng sau:

$$f(x) = P_m^{(1)}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + P_m^{(2)}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

$$= \widetilde{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \widetilde{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{(E52)}$$

trong đó $\widetilde{P}_m^{(1)}, \widetilde{P}_m^{(2)}(x)$ là các đa thức bậc m, tức f(x) là tổng của hai hàm dạng đã xét ở trường hợp 1. Áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm và kết quả ở trường hợp 1 ta suy ra:

a) Nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng $y^*(x)$ được tìm dưới dạng:

$$y^*(x) = \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{(E53)}$$

Trong đó $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$ là các đa thức cấp m với các hệ số bất định.

b) Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội $k(k \geq 1)$ của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng $y^*(x)$ được tìm dưới dạng.

$$y^*(x) = x^k\,[Q_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + Q_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}] \quad \text{(E54)}$$

Từ (E53), (E54) trở lại dạng thực ta đi đến quy tắc tìm nghiệm riêng của phương trình (E44) trong trường hợp này như sau:

- Nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng:

$$y^*(x) = [Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x} \quad \text{(E55)}$$

Trong đó $Q_m^{(1)}, Q_m^{(2)}(x)$ là các đa thức cấp m với các hệ số ta cần xác định.

- Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng $(k \geq 1)$ thì ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng:

$$y^*(x) = x^k\,[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]\,e^{\alpha x} \qquad \text{(E56)}$$

Để xác định các hệ số của $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$ ta thay $y^*(x)$ vào phương trình (E44) như đã tiến hành ở trường hợp 1. Ta cần chú ý rằng ngay cả khi một trong hai đa thức $P_m^{(1)}(x)$ hoặc $P_m^{(2)}(x)$ đồng nhất bằng 0 thì vẫn phải tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng (E55) hoặc (E54).

4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT CẤP HAI

Trong mục này ta sẽ xét một số tính chất nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = 0 \qquad \text{(E57)}$$

Trường hợp p(x), q(x) là những hằng số như đã thấy, ta luôn tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (E57) và do đó dễ dàng biết được các tính chất nghiệm của phương trình. Trường hợp p(x), q(x) không phải là hằng số, thậm chí đối với phương trình dạng đơn giản hơn.

$$y'' + q(x)y = 0 \qquad \text{(E58)}$$

nói chung, không thể tìm được biểu thức của nghiệm tổng quát. Tuy vậy, như sau đây sẽ thấy, dựa vào các tính chất của hàm p(x), q(x) ta có thể biết được một số tính chất của nghiệm phương trình (E57).

1. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VỀ DẠNG KHÔNG CHỨA ĐẠO HÀM CẤP 1

Giả thiết các hàm p(x), q(x) liên tục trên khoảng (a, b), người ta đã chỉ ra rằng tồn tại phép biến đổi:

$$y = \alpha(x)z \qquad \text{(E59)}$$

với z là hàm số mới phải tìm đưa phương trình (E57) về dạng (E58). Thật vậy, thay (E59) vào (E57) ta được:

$$\alpha''(x)\,z + 2\alpha'(x)\,z' + \alpha(x)\,z'' + p(x)[\alpha'(x)z + \alpha(x)z'] + q(x)\alpha(x)z = 0$$

hay:

$$z'' = \left[\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x)\right]z' + \left[\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x)\right]z = 0 \qquad \text{(E60)}$$

Ta chọn $\alpha(x)$ sao cho:

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) = 0$$

Từ đây suy ra:

$$\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} \tag{E61}$$

Khi đó:

$$\alpha'(x) = \frac{-p(x)}{2} e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx}$$

$$\alpha''(x) = \left[\frac{-p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right] e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx}$$

Do đó phương trình có dạng:

$$z'' + \left[-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p^2(x)}{2} + q(x)\right] z = 0$$

hay:

$$z'' + J(x)z = 0 \tag{E62}$$

trong đó:

$$J(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x) \tag{E63}$$

Hàm J(x) được gọi là cái bất biến của phương trình (E57) (vì mọi phép thế dạng (E59) đưa phương trình (E57) về dạng (E62) cùng chung J(x)).

Phương trình (E62) sẽ tích phân được nếu J(x) là hằng số hoặc có dạng $J(x) = \frac{c}{(x-a)^2}$ với a, c là hằng số.

2. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VỀ DẠNG LIÊN HỢP

Định nghĩa: Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 mà hệ số của y' bằng đạo hàm của hệ số y" được gọi là phương trình tự liên hợp.

Như vậy phương trình tự liên hợp cấp 2 có dạng:

$$p'(x)\, y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

hay:

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = 0 \qquad \text{(E64)}$$

Người ta đã chứng minh rằng, phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0 \qquad \text{(E65)}$$

với các hệ số liên tục trên khoảng (a, b) và $p_0(x) \neq 0$ có thể đưa được về dạng tự liên hợp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Arrow, K.J. "The Economic Implications of Learning by Doing," *Review of Economic Studies*, June 1962, 155-173.

2. Arrow, K.J., L. Hurwicz, and H. Uzawa. "Constraint Qualifications in Nonlinear Programming," *Naval Research Logistics Quarterly*, January 1961.

3. Baumol, W.J. "On the Theory of Oligopoly," *Econometrica*, August 1958, 187-198.

4. Bellman, R.E. *Dynamic Programming*. Princeton, N. J: Princecton University Press,1957.

5. Bellman, R. and Stuart Dreyfus *Applied Dynamic Programming*, Princeton, N. J: Princcton University Press,1962.

6. Benveniste, L.M, and J.A. Scheinkman. "On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics," *Econometrica*, 1979, 47(3), 727-732.

7. Braun, M. *Differential Equations and Their Applications*. New York: Springer-Verlag, 1983

8. Brock, W. A., and L. Mirman . "Optimal Economic Growth and Uncertainty: the discounted case," *Journal of Economic Theory* 1972, 4(3),497-513.

9. Cashin, P . "*Government Spending, Taxes, and Economic Growth*." IMF Staff Papers. Vol 42, N^{0}1 June1995.

10. Cass, D. "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies* , July 1965, 233-240.

11. Chiang, A.C. *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill,Inc,1992.

12. Chiang, A. C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw – Hill International Editions, 1984.

13. Chakravarty, S. "The existence of an Optimum Savings Program," *Econometrica*, January 1962, 178-187.

14. Clark, C.W., H.C. Frank, and G. R. Munro. "The Optimal Exploitation of Renewable Resource Stocks: Problems of Irreversible Investment," *Econometrica* 47 (1979), 25-47.

15. Dasgupta, P., and G. Heal. "The Optimal Depletion of Exhaustible Resources," *The Review of Economic Studies*,1974 Symposium, 3-29.

16. Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1991.

17. Dorfman, Robert. "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory," *American Economic Review* 59 (1969), 817-831.

18. Eisner, R., and Strotz, R.H. *"Determinants of Business Investment,"* in Impacts of monetary policy , A series of Research Studies Prepared for Commision on Monetary and Credit, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.

19. Evans, G. C. "The Dynamics of Monopoly," *American Mathematical Monthly* 31(February 1924), 77-83.

20. Farlow, S. J. "An Introduction to Differential Equations and their Applications" McGraw – Hill, Inc, 1994.

21. Fichtengon, G.M. *Cơ Sở Giải Tích Toán Học*, bản dịch NXB Đại Học và Trung Học Chuyên Nghiệp, 1972.

22. Forster, B. A. "Optimal Energy Use in a Polluted Environment," *Journal of Environmental Economics and Management*, 1980, 321-333.

23. Hadley, G., and M. C. Kemp. *Variational Methods in Economics*. North Holland, Amsterdam, 1971.

24. Halkin, H. "Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons," Econometrica (March 1974), 267-272.

25. Hamada, K. "On the Optimal Transfer and Income Distribution in a Growing Economy," Review of Economic Studies 34, 1967, 295-299.

26. Hamermesh, D.S. "Labor Demand and the Structure of Adjustment Costs," American Economic Review, September 1989, pp 647-689.

27. Hansen, G. D. "Indivisible Labor and the Business Cycle", Journal of Monetary Economics 16(1985) 309- 327.

28. Harris, Milton. "Optimal Planning under Transaction Costs: The Demand for Money and Other Assets," Journal of Economic Theory 12 (1976), 298-314.

29. Hestenes, M. R. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: Wiley, 1966.

30. Hirsch, M. W., and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York : Academic Press, 1974.

31. Nguyễn Thế Hoàn – Phạm Phu. *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*. NXBGD, Hà nội 2000.

32. Jacobson, D. H., M.M. Lele, and J. L. Speyer. "New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State Variable Inequality Constraints," *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 35 (1971), 255-84.

33. Jensen, R., and M. Thursby. "A Strategic Approach to the Product Life Cycle," *Journal of International Economics* 21 (1986), 269-84.

34. Jorgenson, D.W."Capital Theory and Investment Behavior," *American Economic Review*, May 1963, 247-259.

35. Kamien, M. L., and N. L. *Schwartz. Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Elsevier, New York. 1981.

36. Kurz, M. "The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes," *Review of Economic Studies* 35 (April 1968a), 155-74.

37. Kydland, F. E., and E. C. Prescott. "Dynamic Optimal Taxation, Rational Expectations and Optimal Control," *Journal of Economic Dynamics and Control* 2 (1980), 79-91.

38. Lê Dũng Mưu. *Nhập môn các phương pháp tối ưu*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1998.

39. Leland, H. E. "The Dynamics of a Revenue Maximizing Firm," *International Economic Review* (June 1972), 376-85.

40. Lê Văn Cường, Rose – Anne Dana. Dynamic Programming in Economics. Kluwer Academic Publishers, 2002.

41. Levhari, D., and T.N. Srinivasan. "Optimal Savings under Uncertainty". *Review of Economic Studies* 36(2), 1969, 153-163.

42. Lewis, T.R ,. S.A. Matthews, and H.S. Burness. "Monopoly and the Rate of Extraction of Exhaustible Resources: Note". *American Economic Review*, March , 1979, 227-230.

43. Ngô Văn Long., and N. Vousden. "Optimal Control Theorems," *in Applications of Control Theory to Economic Analysis* (J. D. Pitchford and S. J. Turnovsky, eds.). North Holland, Amsterdam, 1977.

44. Lucas, R.E. "Econometric Policy Evaluation: a Critique. In The Phillips Curve and Labor Markets, ed. K. Brunner and A.H. Meltzer,19-46. Amasterdam: North-Holland, 1976.

45. Mangasarian, O. L. "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems," *SIAM Journal on Control* 4 (1966), 139-52.

46. Michel, P. "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Control Problems," *Econometrica* (July 1982), 975-985.

47. Nguyễn Khắc Minh "Tiền tệ trong mô hình cân bằng tổng quát". *Tạp chí: Kinh tế và phát triển*, tháng 10, 2002, 37-40.

48. Hotelling, H. "The Economics of Exhaustible Resources". *Journal of Political Economy*, April 1931, 137-175.

49. Nguyễn Văn Sinh, *"Lý thuyết tối ưu hoá động và vấn đề tăng trưởng kinh tế". Tạp chí: Kinh tế và phát triển*, tháng 12, 2002,6-12.

50. Neustadt, L. W. *Optimization: A Theory of Necessary Conditions*, Princeton, N. J: Princeton University Press, 1976.

51. Nordhaus, W.D. "The Political Business Cycle," *Review of Economic Studies* 42 (1975), 169-90.

52. Pitchford, J. D. "Two State Variable Problems," in J. D. Pitchford and S. J. Turnovsky (eds), *Applications of Control Theory to Economic Analysis*. Amsterdam: North Holland, 1977.

53. Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: 1962.

54. Ramsey, F.P "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, (December 1928); 543-559.

55. Sargent, T.J. *Dynamic Macroeconomic Theory*. Harvard : Harvard University Press, 1987.

56. Schworm, W.E. "Financial Constraints and Capital Accumulation," *International Economic Review*, October 1980, 643-660.

57. Seierstad, A, and K. Sydsaeter. "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory," *International Economic Review* 18 (1977), 367-391.

58. Seierstad. A., and K. Sydsaeter. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. New York: Elsevier, 1987.

59. Shell, K. "Towards a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation," *American Economic Review*, May 1966, 62-68.

60. Shell, K. "Aplication of Pontryagin's Maximum Principle to Economics," in H .W. Kuhn and G.P. Szego, eds., *Mathematical Systems Theory and Economics* , Vol 1, New York: Springer- Verlag, 1969,241-292.

61. Smith, Vernon L. "An Optimistic Theory of Exhaustible Resources," *Journal of Economic Theory* 9 (1974), 384-396.

62. Stiglitz,J.E. "Monopoly and the Rate of Extraction of Exhaustible Resources," *American Economic Review*, September 1976, 655-661.

63. Takayama, A. *Mathematical Economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

64. Taylor, D. "Stopping Inflation in the Dornbusch Model: Optimal Monetary Policies with Alternate Price- Adjustment Equations," *Journal of Macroeconomics*, Spring 1989,199-216.

65. Turnovsky S. J. Methods of Macroecononic Dynamic. The MIT Press. 1995

66. Uzawa, H. "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies* 31 (1964), 1-24.

67. Vind, Karl. "Control Systems with Jumps in the State Variables," Econometric*a* 35 (1967), 273-277.

68. Vũ Thiếu., "Quy hoạch động và ứng dụng," Giáo trình khoa Toán Kinh tế, Đại học kinh tế quốc dân, Hà Nội, 1996.

69. Weitzman, M. "Welfare Significance of National Product in a Dynamic Economy," *Quarterly Journal of Economics* 90 (1976), 156-162.

MỤC LỤC

Chương II

Chương III

Chương IV

QUY HOẠCH ĐỘNG

Chịu trách nhiệm xuất bản: **PGS. TS. Tô Đăng Hải**

Biên tập: **Th.s. Vũ Thị Minh Luận**

Trình bày bìa: **Hương Lan**

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

In 800 bản, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Tổng hợp Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 6-20, ngày 5/1/2004.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2004.